jeux de miroirs

par Aurélie Noury, Fabienne Serdin, élèves de Seconde, et Linda Carsac, Fabien Leber, Sylvain Leprêtre, Frédéric Rei, Solen Quéguiner, élèves de Terminale S, Lycée Georges Braque d’Argenteuil (95)

enseignants : Joëlle Richard, Halim Yahiaoui

chercheur : Stéphane Labbé

lycée Georges Braque d'Argenteuil (95) — ***jeux de miroirs***
Peut-on trouver une disposition des miroirs pour qu'un rayon de lumière fasse le tour d'un obstacle et revienne sur lui-même ? conditions pour minimiser le nombre de miroirs, le trajet parcouru ?

Le problème consiste à contourner un objet quelconque à l’aide d’un faisceau lumineux et de miroirs. L’intérêt est de minimiser la longueur du trajet parcouru par le faisceau ainsi que le nombre de miroirs.

Pour cela on tiendra compte de la loi de réflexion qui dit que l’angle d’incidence est égale à l’angle de réflexion.

De plus on distinguera les polygones concaves des polygones convexes. Dans les figures convexes, on parlera d’abord de quelques polygones réguliers (triangle équilatéral, carré, pentagone, hexagone) puis des irréguliers (triangles quelconques, losange, rectangle, trapèze) et enfin du cercle. Dans les figures concaves, on traitera les figures en “*L*” puis les étoiles à *n* branches.

LES POLYGONES REGULIERS.

le triangle équilatéral.

Prenons tout d’abord un objet simple : le triangle. On remarque que le trajet et le nombre minimum de miroirs sont obtenus directement : il faut placer la source et les deux miroirs aux sommets et longer les arêtes.

Périmètre: $P = 3\,c$.

le carré.

Pour avoir un nombre de miroirs minimum, il faut inscrire le carré dans un triangle et placer la source et les deux miroirs au sommet.

Périmètre : $P = 3\,c + 2\,c\;3$

Pour obtenir un trajet minimum, il suffit de longer le carré en plaçant la source et les trois miroirs aux sommets.

Périmètre $P = 4\,c$.

le pentagone.

Pour contourner le pentagone, avec un trajet minimal, il suffit de longer les côtés du pentagone, donc la longueur du trajet équivaut au périmètre de la figure. D'où $P = 5\ a$, P étant la longueur du trajet et a la mesure du côté du pentagone.

On a donc contourné le pentagone avec 4 miroirs. Cependant, on peut le contourner avec 3 miroirs : on obtient alors un trajet dessinant un rectangle de périmètre

$$P = a\,(5+1+\tan 2\pi/5),$$

soit en simplifiant :

$$P = 6{,}2\ a.$$

Puis, pour contourner le pentagone avec 2 miroirs, on a 2 solutions : on place la source de telle sorte que le trajet forme un triangle contournant l'objet et dont la base passe soit par un côté du pentagone, soit par un sommet.

Le demi-angle θ du sommet du triangle est la variable de l'expression du périmètre.

Expression du périmètre en fonction de θ dans le cas 1 :

$$P(\theta) = a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sin\theta} + \frac{2\sin\frac{2\pi}{5}}{\cos\theta} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2\sin\frac{2\pi}{5}\tan\theta\right)$$

Et l'on trouve $P(\theta)$ minimal pour une valeur de θ comprise entre 33,9° et 34°, soit en simplifiant : $P = 8{,}09\ a$ (environ).

Expression du périmètre en fonction de θ dans le cas 2 :

$$P(\theta) = a\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\theta} + \frac{5+\sqrt{5}}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}\tan\theta\right)$$

On remarque que le périmètre est plus petit dans le cas 2.

l'hexagone.

Pour contourner un hexagone, avec cinq miroirs, afin d'obtenir un trajet minimal, on va longer les côtés. Le périmètre du trajet sera égal au périmètre de l'hexagone, c'est-à-dire $P = 6\ a$, « a » étant la mesure du côté de l'hexagone.

Avec trois miroirs, le trajet parcouru formera un rectangle de périmètre P = 2 a (3 +2).

Pour un nombre de miroirs minimum, c'est-à-dire deux, le trajet est un triangle. On place la source sur l'axe de symétrie de la figure et on longe un des côtés de celle-ci par un côté du triangle. Le trajet est minimisé pour un triangle équilatéral.

le cercle.

Ayant constaté qu'un polygone régulier se rapprochait de la forme d'un cercle lorsque le nombre de ses côtés tendait vers l'infini, on calcule alors le trajet minimal autour du cercle avec un nombre minimal de miroirs.

On calcule donc le trajet avec 2 miroirs, ce qui nous donne un triangle de perimètre P exprimé en fonction du rayon du cercle : r et de l'angle α.

$$P(\alpha) = \frac{4\,r + \sin\alpha}{\sin 2\alpha}$$

r étant déterminé, il s'agit d'une fonction où α est l'inconnue. Ainsi en programmant cette fonction sur la calculatrice on en déduit que le trajet minimal pour faire le tour d'un cercle avec 2 miroirs est un triangle équilatéral car $\alpha = 30°$.

POLYGONES IRREGULIERS

le rectangle

• *Avec 3 miroirs*
Le faisceau lumineux longe les côtés du rectangle, lorsque les miroirs sont disposés sur 3 des 4 sommets, le quatrième étant réservé à la source.

• *Avec 2 miroirs*
On place la source sur l'axe de symétrie du rectangle qui coupe les 2 largeurs. Pour chaque couple (a, b) on minimise le trajet en sachant que la variable est θ. On trouve comme expression du périmètre :

$$P(\theta) = 2\,b \tan\theta + \frac{2\,b}{\cos\theta} + \frac{a}{\sin\theta} + a$$

le losange

• *Avec 3 miroirs*
Pour établir le trajet minimal, il faut longer les côtés de l'objet tel que les 3 miroirs soient aux sommets du losange, le quatrième étant réservé à la source. Le périmètre : $P = 4\,a$.

• *Avec 2 miroirs*
On peut minimiser le nombre de miroirs en inscrivant le losange dans un triangle dont 2 des côtés longent 2 côtés de l'objet formant l'angle le plus petit du losange.

Exemple: Pour un losange ayant deux angles de 60° et deux de 120°, on se propose de calculer le périmètre du triangle contournant le losange en fonction du demi-angleθ.

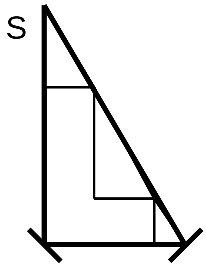
On obtient :

$$P(\theta) = \frac{2\,a \cos\theta + \sin\theta\,\sqrt{3}}{\sin 2\theta} + a + a\sqrt{3}\tan\theta$$

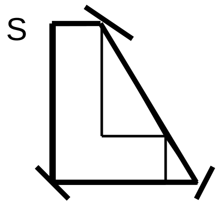
Pour ce cas particulier le triangle est équilatéral et on trouve un périmètre minimal pour θ = 30°.

POLYGONES CONVEXES EN FORME DE L

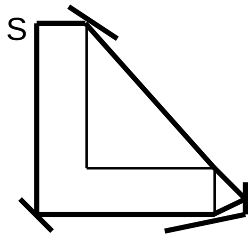
• *Avec 2 miroirs*



• *Avec 3 miroirs*



• *Avec 4 miroirs*



POLYGONES ETOILES. ENVELOPPE CONVEXE.

LES ETOILES

ETOILE A 5 BRANCHES
Son enveloppe convexe est un pentagone.

ETOILE A 6 BRANCHES
Son enveloppe convexe est un hexagone.