alerte à la D.D.E.

par Jean Christophe Adam, Thomas Crauk, Fabien Gauthe, Delphine Girou, Jean-Philippe Reuillon, Romain Yvonnet et Roman Winkler, élèves de 1°S1 du lycée Jules Ferry de Coulommiers (77)

enseignante : Sandrine Lefranc

chercheur : Olivier Bodini

[NDLR : D.D.E. = direction départementale de l'équipement ; à défaut de la décision (politique) du tracé des routes, elle a en charge leur entretien.]

Comment relier toutes entre elles un nombre défini de villes en minimisant le nombre de croisement entre les voies les reliant ?

Tel est le problème que peuvent se poser les ingénieurs de la D.D.E. Pour répondre à cette question, nous nous sommes donc improvisés " ingénieurs " pour quelques temps.

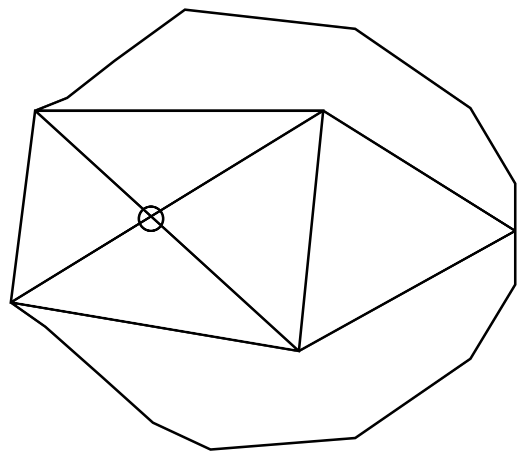
Nous avons obtenu un encadrement du nombre de ponts entre une valeur minimum sous laquelle on ne peut pas aller, et une valeur maximum qui nous permet de restreindre notre encadrement.

Notations : f représentera le nombre de faces apparaissant dans la figure(l'extérieur de la figure comptant pour une face), a le nombre d'arêtes, n le nombre de villes, P le nombre de ponts, p le nombre de points.

Remarque : On a la relation évidente suivante: $p = n + P$.

Formule admise. Nous avons admis la formule suivante afin d'obtenir la valeur minimum de notre encadrement : $f - a + p = 2$

Exemple:



nombre de points = 5(villes) + 1(pont) = 6 ; nombre de faces = 8 faces (avec la face extérieure) ; nombre d'arêtes = 12 arêtes $(n(n-1)/2 + 2P = (5 \times 4)/2 + 2 = 12)$.

$$f - a + p = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Propriété : Nous avons la relation suivante :

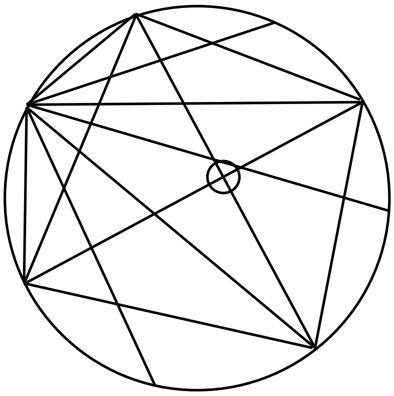
$$a = n(n–1)/2 + 2\,P$$

Démonstration. Deux villes créent $(1 + k)$ arêtes, où k est le nombre de ponts situés sur le chemin qui les relie. Il y a donc autant de chemins que de façons de regrouper les villes 2 par 2, c'est-à-dire $n(n–1)/2$. Le nombre d'arêtes est donc égal à $n(n–1)/2$ auquel on doit ajouter la somme des k. Or celle-ci est égale à $2P$ car tout pont est situé sur deux chemins donc compté deux fois.

Théorème : Nous avons obtenu, avec les notations précédentes:

$$(n–3)(n–4)/2 \le P \le n(n–1)(n–2)(n–3)/24$$

Démonstration de la borne supérieure. On dispose les points sur un cercle et on décide de ne les relier que par des segments.



Quand on relie quatre points sur le cercle, les deux diagonales du quadrilatère obtenu obligent la présence d'un pont. On peut dire qu'il y a autant de ponts qu'il y a de possibilités de former des quadrilatères avec les différents points situés sur le cercle.

Nombre de quadrilatères : on a p possibilités pour placer le premier sommet, $(p–1)$ possibilités pour le deuxième, $(p–2)$ possibilités pour le troisième, $(p–3)$ possibilités pour le dernier. Mais, en faisant ce calcul, on compte plusieurs fois le même quadrilatère, 24 fois exactement $(4 \times 3 \times 2)$.

Donc, on peut construire une figure possédant $p(p–1)(p–2)(p–3)/24$ ponts. Le nombre minimum de ponts P que l'on recherche lui est donc inférieur. D'où :

$$P \le p(p–1)(p–2)(p–3)/24.$$

Démonstration de la borne inférieure. Nous avons utilisé : $f = a - p + 2$; $a = n(n-1)/2 + 2\,P$; $p = P + n$. Insérons les deux dernières formules dans la première :

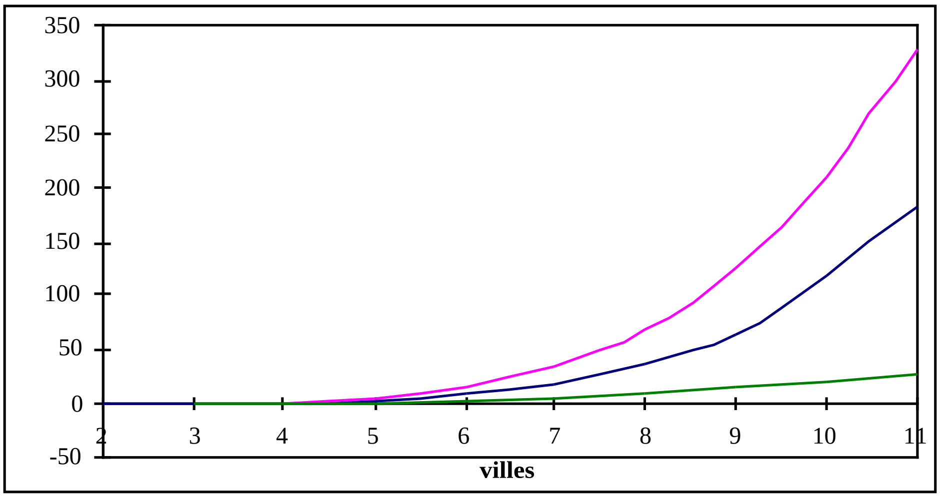
$$\begin{aligned} f &= n(n-1)/2 + 2\,P - P - n + 2 \\ &= (n^2 - n + 2\,P + 4 - 2\,n)/2 \\ &= n(n-3)/2 + P + 2. \end{aligned}$$

Or de chaque point partent au minimum 2 arêtes et chaque face est délimitée par au moins 3 arêtes ; donc $3\,f \le 2\,a$, c'est-à-dire :

$$\begin{gathered} 3\,\big(n(n-3)/2 + P + 2\big) \le 2\,n(n-1)/2 + 4\,P \\ 3\,n(n-3)/2 + 3\,P + 6 \le n(n-1) + 4\,P \\ 3\,n(n-3)/2 - n(n-1) + 6 \le P \\ \big(3\,n(n-3) - 2\,n(n-1) + 12\big)/2 \le P \\ [(n–3)(n–4)]/2 \le P \end{gathered}$$

Tableau de valeurs et courbe obtenue.

	nombre de ponts …		
nombre de villes	valeurs minimum	valeurs déterminées graphiquement	valeurs maximum
2		0	
3	0	0	
4	0	1	1
5	1	3	5
6	3	9	15
7	6	19	35
8	10	38	70
9	15	64	126
10	21	120	210
11	28	182	330



(maximum calculé)

(détermination graphique)

(minimum calculé)