les pavages

par Théophane Lumineau, lycée Saint-Exupéry de Mantes-la-Jolie (78)

enseignant : Régize Noui

chercheur : Pierre Duchet

lycée Saint Exupéry de Mantes la Jolie (78)
— l'art mathématique des pavages

Si carrés, rectangles et hexagones sont les formes les plus courantes utilisées pour les carrelages, bien d'autres formes ont la propriété de paver l'espace, c'est-à-dire en s'assemblant de manière parfaite, sans recouvrement ni lacune …

Qu'est-ce que le pavage ?

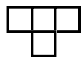
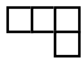
« Si carrés, rectangles et hexagones sont les formes les plus courantes utilisées pour les carrelages, bien d'autres formes ont la propriété de paver l'espace, c'est-à-dire de pouvoir s'assembler de manière parfaite, sans recouvrement ni lacune. Nous nous intéresserons ici aux pavages réalisés avec une seule forme de base (appelée pièce ou tuile).

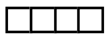
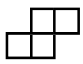
La plupart des dallages imaginés par l'homme et des pavages qui se trouvent à l'état naturel (matières cristallines) sont périodiques : des motifs y apparaissent régulièrement disposés en réseaux (les papiers peints et les tissus imprimés donnent des exemples de tels réseaux). Mais des pavages non périodiques (et même “anti-périodiques”) sont également possibles. »

Nous avons axé principalement notre recherche à trouver les formes qui peuvent être pavées par une pièce donnée telle qu'un polymino. Le mot « polymino » désigne un assemblage de carrés tous égaux collés entre eux, chaque case est reliée au “reste” par au moins un côté et le polymino peut être construit par additions successives de cases reliées au reste.

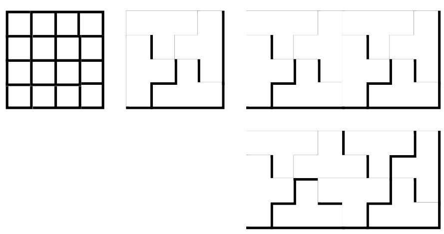
Ainsi un polymino composé de deux cases est un domino. 

Un polymino composé de trois cases est un trimino. 

Un polymino composé de quatre cases est un tétramino :
tétramino « T »  tétramino «L» 

tétramino «I»  tétramino «S» 

Nous nous sommes particulièrement intéressés aux pavages réalisés avec des tétraminos « T » et avons trouvé l'unité de base de pavage (carré 4×4) et de ce fait toute aire multiple de cette dernière.



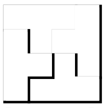
Définition et terminologie.

Toute surface est définie par rapport à une unité d'aire (u.a.). Nous utiliserons ici une unité arbitraire : □. Tout d'abord si la surface est parfaitement pavée par des polyminos alors elle en contient un nombre entier.

Théorème. Dans le cas général, l'aire des surfaces pavées est multiple de l'aire des polyminos qu'elle contient.

Cas du tétramino « T » : les surfaces pavées sont donc multiples de l'aire du tétramino, donc de quatre. $A = 4\,k$, k entier naturel non nul.

Etude du tétramino « T » ***:***



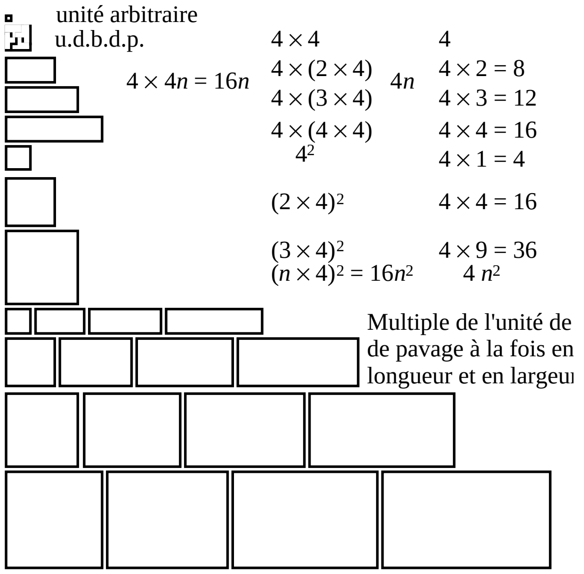
Au cours des recherches nous avons trouvé la plus petite surface (rectangulaire) pavable par des tétraminos, que nous avons appelée unité de base de pavages (u.d.b.d.p.).

Le nombre de polyminos contenus dans leur unité de base de pavage s'appelle l'ordre du polymino (ainsi noté par le mathématicien chercheur) ; dans notre cas, l'ordre du tétramino « T » est donc de quatre. Par récurrence, on démontre que les surfaces multiples de l'unité de base (u.d.b.d.p.) sont automatiquement pavables. N'ayant pas trouvé de contre-exemple, nous avons été amenés à poser la conjecture suivante :

Conjecture. Seules les surfaces multiples de l'u.d.b.d.p. du tétramino sont pavables par celui-ci. ⇔ Les côtés doivent être multiples de ceux de l'u.d.b.d.p. Les aires des surfaces sont du type : $A = 4m \times 4p$ (m et p deux entiers naturels non nuls) $A = 16\,mp = 16\,k$ (k entier naturel non nul).

Il reste maintenant à la démontrer (ou bien à l'infirmer !)

Possibilités de rectangles pavés par des tétraminos « T » ***:***

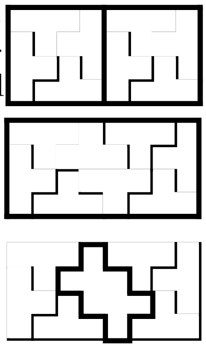


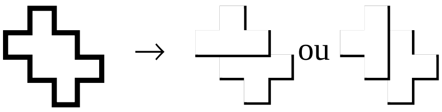
n est le nombre d'u.d.b.d.p.

m (de 1 à 10)	p (de 1 à 10)	largeur 4m	longueur 4p	nombre de polyminos (4mp)
1	1	4	4	4
1	2	4	8	8
1	3	4	12	12
1	4	4	16	16
1	5	4	20	20
1	6	4	24	24
1	7	4	28	28
1	8	4	32	32
1	9	4	36	36
1	10	4	40	40
2	2	8	8	16
2	3	8	12	24
2	4	8	16	32
2	5	8	20	40
2	6	8	24	48
2	7	8	28	56
2	8	8	32	64
2	9	8	36	72
2	10	8	40	80
3	3	12	12	36
3	4	12	16	48
3	5	12	20	60
3	6	12	24	72
3	7	12	28	84
3	8	12	32	96
3	9	12	36	108
3	10	12	40	120
4	4	16	16	64
4	5	16	20	80
4	6	16	24	96
4	7	16	28	112
4	8	16	32	128
4	9	16	36	144
4	10	16	40	160
5	5	20	20	100
5	6	20	24	120
5	7	20	28	140
5	8	20	32	160
5	9	20	36	180
5	10	20	40	200
6	6	24	24	144
6	7	24	28	168
6	8	24	32	192
6	9	24	36	216
6	10	24	40	240
7	7	28	28	196
7	8	28	32	224
7	9	28	36	252
7	10	28	40	280
8	8	32	32	256
8	9	32	36	288
8	10	32	40	320
9	9	36	36	324
9	10	36	40	360
10	10	40	40	400

Ayant examiné les figures créées, on a observé plusieurs phénomènes.

Nous pouvons réaliser la sommation seule d'u.d.b.d.p.→ mais aussi la liaison d'un seul tenant de polyminos pour créer ces surfaces →
L'union de toutes les unités est réalisable par le fait qu'une surface de liaison peut être pavée de deux manières différentes :





Nous avons donc distingué plusieurs configurations de pavages : le chemin, les figures sécables, les figures dissociables, les figures cohérentes, les pavages complexes, les pavages périodiques, la mise en abîme.

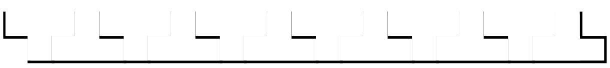
le chemin :

• Un chemin se définit comme une succession de polyminos entiers créant un pavage parfait dont le départ *D* et la fin *F* sont complémentaires et peuvent donc s'emboîter.

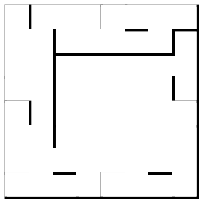
• Par conséquent, s'agissant d'une succession de polyminos entiers, la hauteur du chemin sera liée à ce polymino, c'est-à-dire égale soit à sa longueur, soit à sa largeur.

Pour créer un chemin, il faut respecter simultanément ces deux conditions. Exemple, avec un tétramino « T » : la base du chemin pourra être égale à trois ou à deux. Si la base est égale à 3, la création d'un chemin est impossible, puisque dans ce cas, les tétraminos ne peuvent à la fois s'inscrire dans une base de 3 et être entiers. En revanche, si nous prenons 2 comme base du chemin, les deux conditions sont prises en compte.

Le chemin élémentaire pave une portion du plan à l'infini :

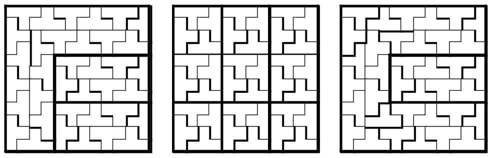


Par conséquent, pour paver une surface, le chemin élémentaire doit subir des opérations (rotation de 90°). Si le chemin ne réalise qu'un pourtour, laissant donc une partie vide au centre, il sera appelé couronne →



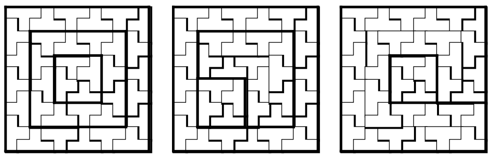
les figures sécables :

Une figure pavée est dite sécable lorsque le résultat de sa division donne des figures parfaitement pavées. Elle est donc la juxtaposition d'éléments parfaitement pavés. Ces derniers peuvent avoir la forme d'un carré, d'un « T », d'un « L », d'un « U », d'un « 3 », d'un « F », etc, chacune multiple de l'unité de base (4×4) mais indivisible.



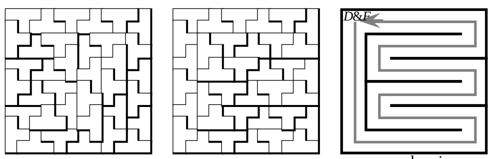
les figures dissociables :

Une figure pavée est dite dissociable lorsque ses composantes ne sont pas juxtaposées mais incluses les unes dans les autres. La forme la plus simple d'une telle figure est une couronne dans laquelle est incluse un carré 4×4. Les formes incluses sont des multiples de l'unité de base (4×4).



les figures cohérentes :

Une figure pavée est dite cohérente lorsqu'elle n'est ni sécable, ni dissociable. Cette figure est obtenue par la circulation d'un seul chemin (les unités des figures sécables et dissociables sont des figures cohérentes).



chemin

les pavages complexes :

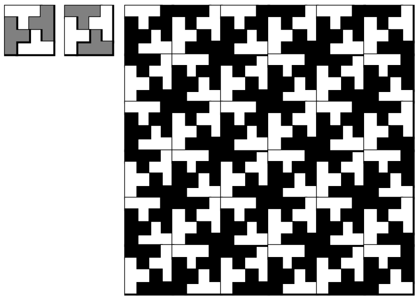
Un pavage est dit complexe lorsqu'il est composé de figures sécables, dissociables et cohérentes. Sa caractéristique est la composition.

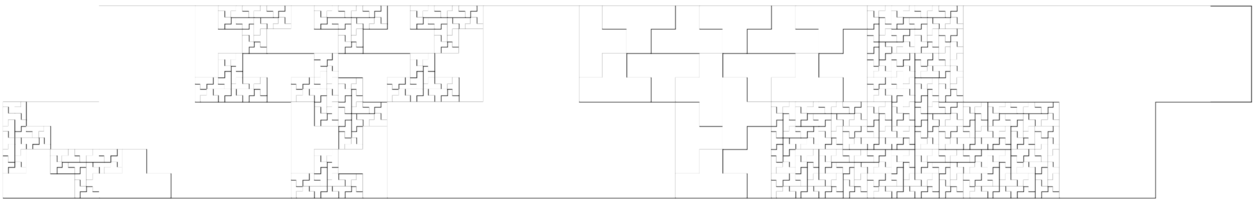
les pavages périodiques :

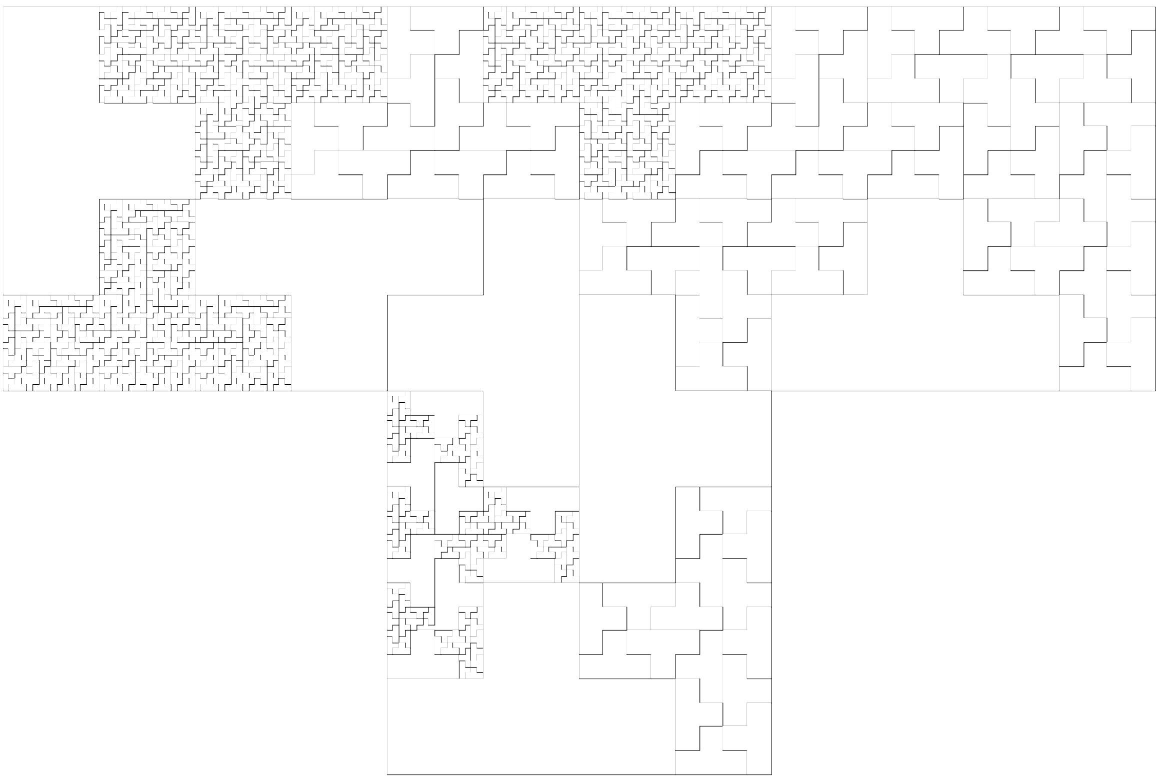
Un pavage est dit périodique lorsque sa caractéristique est la répétition.

la mise en abîme :

Le polymino en forme de « T » permet la mise en abîme ; en effet, une surface peut être composée de « T » qui sont eux-mêmes composés de « T » plus petits qui seront eux-mêmes composés de « T » encore plus petits et ainsi de suite. L'unité arbitraire d'un « T » sera l'unité de base de pavage du « T » précédent. Le tétramino « T » est donc un Rep-tile. [voir ci-dessous]







Nous nous sommes particulièrement intéressés au tétramino « T ». Mais de nombreuses questions restent posées, et il reste à réaliser la plus grosse partie du travail : la démonstration de la conjecture.

Nous recherchons maintenant des pistes dans le domaine du dénombrement : à la fois dans le nombre de pavages possibles (le nombre de façons de paver une même figure), le nombre de chemins réalisables dans une figure ou le nombre de créations de pavages périodiques avec seulement deux types de polyminos (noir et blanc).

De plus il serait intéressant de continuer les recherches vers d'autres polyminos et de dégager un comportement général ; enfin de conclure longue vie aux polyminos !!! (si imperceptibles).