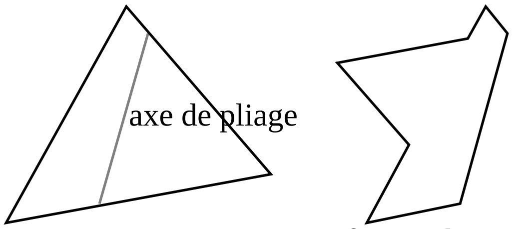
pliage d'un triangle

par Christine Driot, Cindy Maury, Igor Rangama, Sylvain Tabourin, Kian Tawadjoh, élèves de 1°S1 du lycée Jules Ferry de Coulommiers (77)

enseignante : Sandrine Lefranc

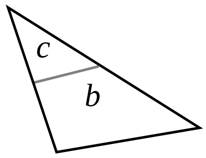
chercheur : Olivier Bodini

Le but de notre recherche est de trouver quel sera le pliage nécessaire à un triangle quelconque pour que l'aire obtenue après pliage soit minimale.



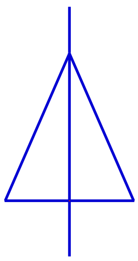
Propriété 1. L'aire de la figure obtenue est au minimum égale à la moitié de l'aire du triangle de départ.

Démonstration. Soit a l'aire d'un triangle donné. L'axe de pliage crée deux petites figures d'aires respectives b et c.



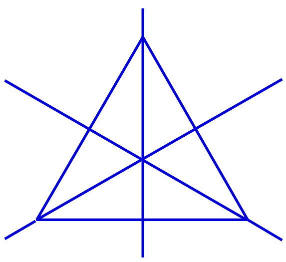
On a $a = b + c$ et nécessairement, b ou c est supérieure ou égale à $a/2$. Supposons que ce soit b. Alors l'aire de la figure obtenue en pliant aura une aire supérieure à b donc à $a/2$. Donc l'aire de la forme obtenue après pliage est toujours supérieure ou égale à la moitié de l'aire du triangle de départ.

Cas d'un triangle isocèle.



Propriété 2. Le pliage donnant une aire minimale à la forme obtenue est celui dont la pliure correspond à l'axe de symétrie du triangle.

Démonstration. Lorsque l'on plie le triangle isocèle par son axe de symétrie, on obtient alors un triangle rectangle correspondant exactement à la moitié du triangle isocèle initial. On peut donc en conclure que l'aire du triangle initial a été divisée par 2. Ce pliage est maximal, car il est impossible de plier un triangle isocèle tel que son aire soit divisée par plus que par 2.



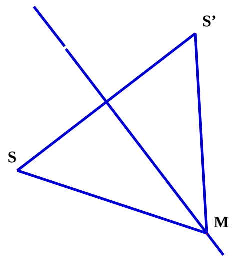
Remarque : Le cas du triangle équilatéral est alors traité en même temps ; de plus il y a trois pliages différents donnant une aire minimale.

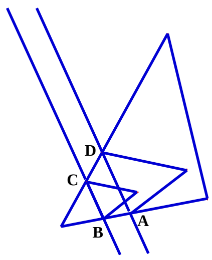
Cas d’un triangle quelconque.

On se limitera à l’étude des cas où la partie repliée ne sort pas du triangle initial.

Propriété 3. Soit *S* un sommet du triangle et *S*’ le point représentant la position de ce sommet après pliage. Alors la pliure *P* est la médiatrice du segment [*SS*’].

Démonstration. En effectuant un pliage, on effectue en réalité une symétrie dont l’axe est la pliure. Dans le cas présent, on construit le symétrique du sommet. La définition de cet axe de symétrie est également celle d’une médiatrice, à savoir que *SM* = *S*’*M* (*M* étant un point quelconque de l’axe de pliage) et tel que [*SS*’] soit perpendiculaire à l’axe de pliage. On peut donc en conclure que la pliure est également la médiatrice du segment [*SS*’].



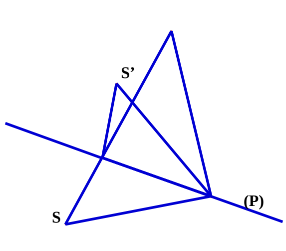


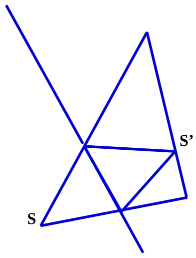
Propriété 4. Si on plie un sommet sans qu’il n’atteigne le côté opposé et sans que la pliure ne passe par un sommet, le pliage n’est pas optimal.

Démonstration. Soient [*AD*] et [*BC*] deux pliures possibles, [*AD*] étant obtenue par translation de [*BC*], telles que le sommet plié n’atteint pas le côté opposé et les pliures ne passent par aucun sommet du triangle. La différence d’aire obtenue entre les deux pliages est celle du quadrilatère *ABCD*. Le meilleur pliage consiste donc à utiliser la pliure [*AD*].

Soit (*P*) la pliure utilisée dans le pliage. Deux cas se présentent alors :

1er cas : (*P*) passe par un des deux autres sommets du triangle ;

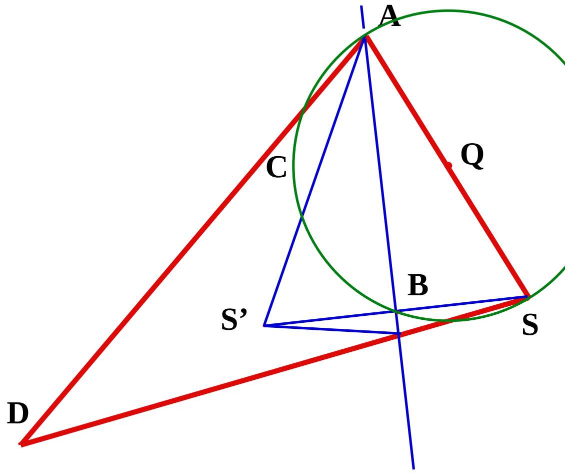




2ème cas : *S*’ se trouve sur un des côtés du triangle.

Etude du 1er cas :

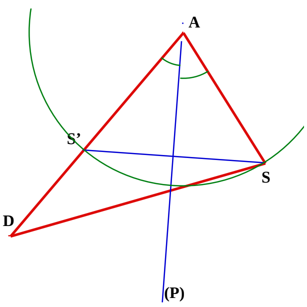
Le meilleur pliage consiste dans ce cas à prendre pour pliure la bissectrice de l'angle dont le sommet est sur (*P*).



Démonstration. Par la propriété 3, nous savons que *ABS* est un triangle rectangle. Donc, quand la pliure (*P*) varie, le point *B* se trouve toujours sur le cercle de diamètre [*AS*] donc de centre *Q* milieu de [*AS*]. Comme on s'est restreint au cas où le pliage ne sortait pas du triangle initial, *B* décrit en fait uniquement la partie *C* de ce cercle située à l'intérieur du triangle.

S' est l'image de *B* par une homothétie de centre *S* et de rapport 2 ; il se situera donc toujours sur une partie de l'image de *C* par cette même homothétie *i.e*. sur la partie *C*' du cercle de centre *A* image de *Q* et de rayon [*AS*] située à l'intérieur du triangle.

Les parties repliées sont toutes des triangles ayant la même base [*AS*] et des hauteurs croissantes quand *S*' se rapproche de [*DA*]. Choisissons donc *S*' à l'intersection de *C*' et du côté [*DA*] et regardons ce que cela nous donne comme pliure : le triangle *S'AS* est isocèle, la pliure (*P*), étant la médiatrice de [*SS*'], est la bissectrice de l'angle issu du sommet *A*.



Etude du 2ème cas :

Nous n'avons pas eu le temps de démontrer un résultat semblable au 1er cas mais il semble que la bissectrice de l'angle ne soit pas toujours la meilleure façon de plier le triangle.