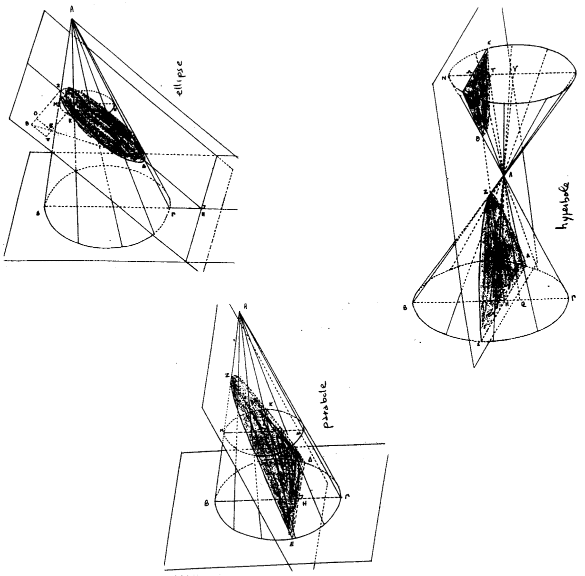
le “plan de coniques”

par Isaac Balarbé 1°S, Etienne Collomb Tle S, Stéphane De Blic Tle S, Nicolas Ferey Tle S, Henri Hay 1°S, Arash Mostafazaday Tle S, Pierre Ruaud Tle S, Sebastien Serrand Tle S, du lycée Pablo Picasso de Fontenay-sous-Bois (94) et du lycée Romain Rolland d’Ivry-sur-Seine (94)

enseignantes : Monique Corlay, Sophie Diallo, Christiane Guedj, Claude Parreau

chercheur : Olivier Piltant

Une conique est l’intersection d’un plan et d’un cône de révolution. Trois types de coniques peuvent être obtenus :



L’étude de ces figures particulières remonte à la Grèce antique. L’Ecole de Platon — IIIème siècle avant J.C. — étudia les coniques. En particulier, Appolonius établit les propriétés géométriques des coniques, en les étudiant dans l’espace. Il faudra attendre le 17ème siècle pour que d’autres mathématiciens (De La Hire, Descartes) étudient les coniques comme figures du plan. Ils démontreront que toutes les coniques ont une équation de la forme

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

C’est une équation du second degré à 6 paramètres (a, b, c, d, e, f).

Dans le film de Monsieur Bourguignon, « *La Nouvelle Etoile Du Berger* », une ellipse était associée à un point du plan, grâce à 2 paramètres. Partant de cette idée, notre chercheur, M. Piltant, nous a proposé le sujet suivant :

Nous nous restreindrons aux coniques passant par les 3 points du repère :

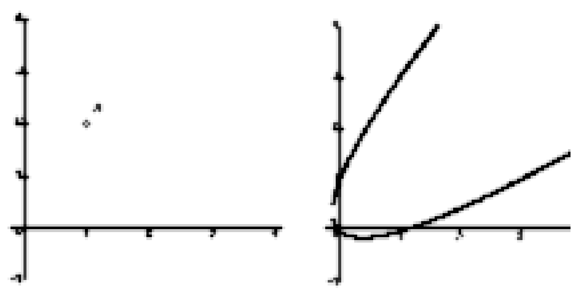
$$O(0, 0),\ A(0, 1) \text{ et } B(1, 0).$$

On obtient alors une équation de la forme :

$$a\,(x - x^2) + bxy + y - y^2 = 0.$$

Cette équation n’a plus que 2 paramètres : a et b. A cette équation, on peut donc associer un point dans un plan, point de coordonnées (a, b). [On a appelé ce plan : le “plan des coniques”.]

Exemple.



La conique d’équation

$$x - x^2 + 2xy + y - y^2 = 0$$

est représentée par le point $A(1\ ,\ 2)$ du plan.

Problématique : Que représentent dans ce plan, les figures simples de géométrie, telles que droites, droites parallèles, coniques ?

Les différents types de coniques

L'équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

se met sous la forme

$$cy^2 + y(e+bx) + ax^2 + dx + f = 0,$$

équation du second degré (dans le cas $c \neq 0$, voir le cas $c = 0$ plus loin) dont le discriminant est

$$\begin{aligned}\Delta &= (e+bx)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)\\ &= (b^2 - 4ac)\,x^2 + Bx + C\end{aligned}$$

(B, C étant des constantes). On en tire :

$$y = \frac{-e - b\,x + \sqrt{(b^2 - 4\,a\,c)\,x^2 + B\,x + C}}{2\,c}$$

ou :

$$y = \frac{-e - b\,x - \sqrt{(b^2 - 4\,a\,c)\,x^2 + B\,x + C}}{2\,c}$$

En regardant les valeurs de x pour lesquelles $\Delta \geq 0$, on déduit le nombre de branches infinies de la courbe. En effet si $b^2 - 4ac < 0$, le trinôme $(b^2 - 4ac)x^2 + Bx + C$ sera positif sur un segment $[x_1 ; x_2]$, x_1 et x_2 étant ses racines (il n'y aura même pas de courbe si le trinôme n'a pas de racines car il restera négatif), donc la courbe ne peut être qu'une ellipse. Si $b^2 - 4ac \geq 0$, on étudie les directions asymptotiques (deux pour une hyperbole, une pour la parabole) en cherchant :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2\,c}\left(-b - \frac{e}{x} \pm \sqrt{(b^2 - 4\,a\,c) + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{2\,c}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right)$$

Il reste cependant à étudier le cas $c = 0$ où on a :

$$y = \frac{-a\,x^2 - d\,x - f}{b\,x + e}$$

On a ici une parabole si $b = 0$ (donc $b^2 - 4ac = 0$) et une hyperbole si $b \neq 0$ ($b^2 - 4ac > 0$).

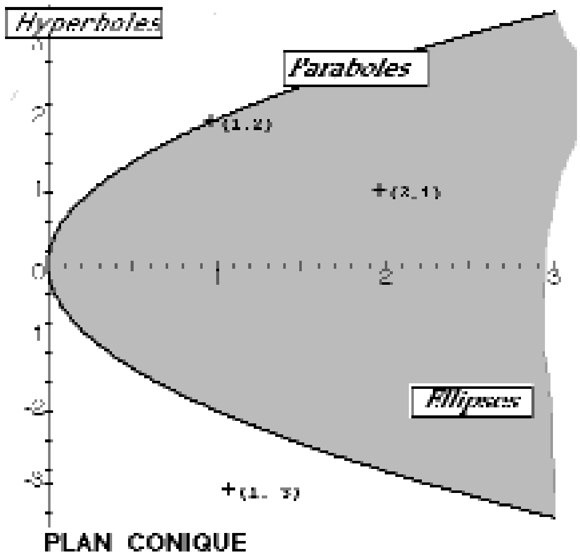
On obtient ainsi le tableau suivant :

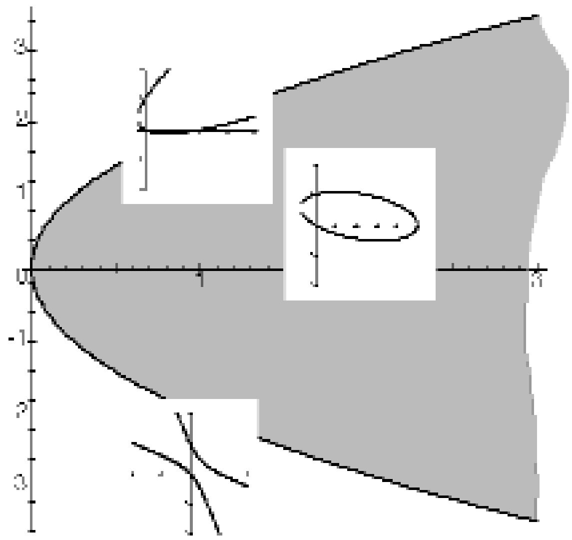
$b^2 - 4ac = 0$	parabole
$b^2 - 4ac < 0$	ellipse
$b^2 - 4ac > 0$	hyperbole

remarques :

• On obtient parfois une conique dégénérée constituée de deux droites (si Δ est un carré parfait).

• Dans le cas des coniques définies par un point (a, b) du plan conique, donc d'équation $a\,(x - x^2) + bxy + y - y^2 = 0$, $b^2 - 4ac$ devient $b^2 - 4a$. Cela donne la représentation suivante dans le plan, où on a dessiné la parabole d'équation $b^2 = 4a$.





Droite de coniques b = ma + p

Cherchons les points d'intersection de deux coniques de la même "droite". Le système :

$$a\,(x - x^2) + (ma + p)\,x\,y + y^2 - y = 0$$
$$a'(x - x^2) + (ma' + p)\,x\,y + y^2 - y = 0$$

est équivalent à

$$a\,(x - x^2) + (ma + p)\,x\,y + y^2 - y = 0$$
$$(a - a')\,(x - x^2 + m\,x\,y) = 0$$

On trouve comme points d'intersections les points $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1)$ et le point vérifiant :

$$my = x - 1$$
$$(x-1)\big(-xm^2a+m(ma+p)x+m-x+1\big) = 0$$

soit $\quad my = x - 1$
$\qquad\; x\,(1 - mp) = 1 + m$

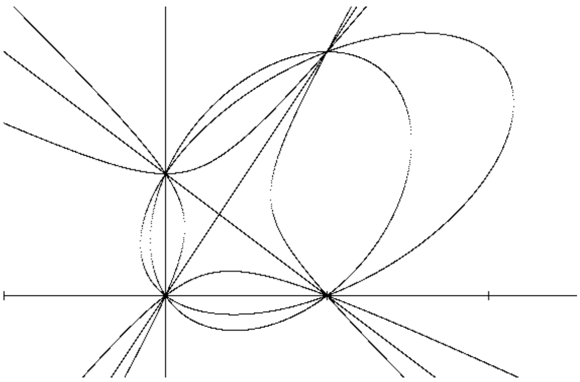
soit, lorsque $mp \neq 1$ (le cas particulier $mp = 1$ est étudié plus loin), le point de coordonnées

$$\left(\frac{1+m}{1-m\,p}\,,\,\frac{1+p}{1-m\,p}\right)$$

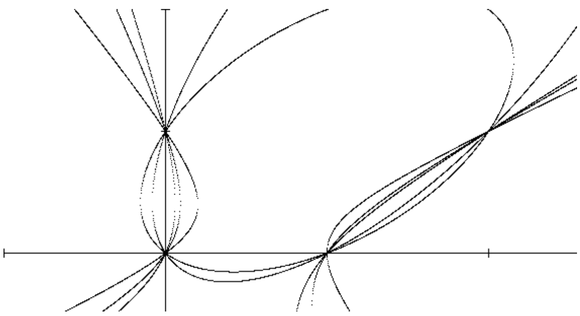
(point indépendant de a et b). On en déduit :

Toutes les coniques de la même "droite" passent par un quatrième point.

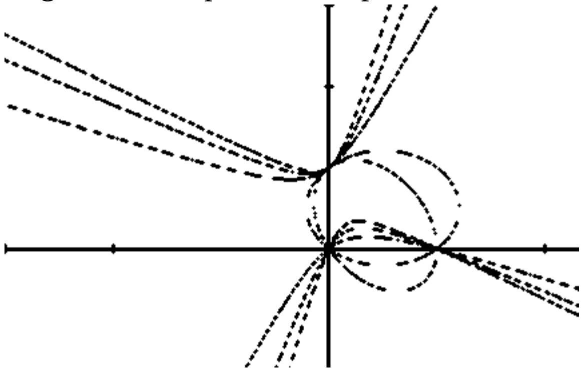
Exemples. $b = 1$:



$b = 2a$:



Remarque : ce point est éventuellement confondu avec un des trois points A, B, C. Il devient alors double et les courbes sont toutes tangentes en ce point. Exemple. $b = -a + 1$:



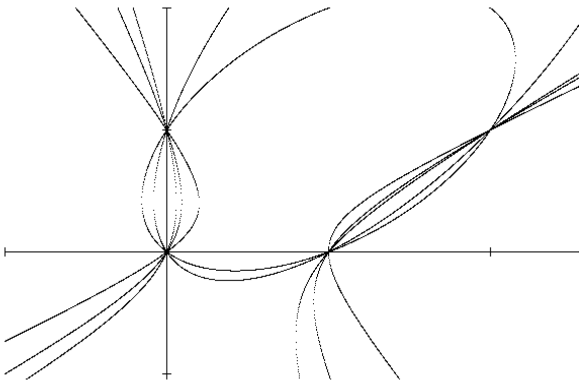
Inversement un quatrième point d'intersection correspond à une "droite" de coniques. Il suffit de remplacer dans l'équation de la conique x et y par les coordonnées du point pour avoir la relation entre a et b.

Lorsque des "droites" de coniques sont parallèles (même "m"), les quatrièmes points correspondants sont alignés. En effet le quatrième point, de coordonnées

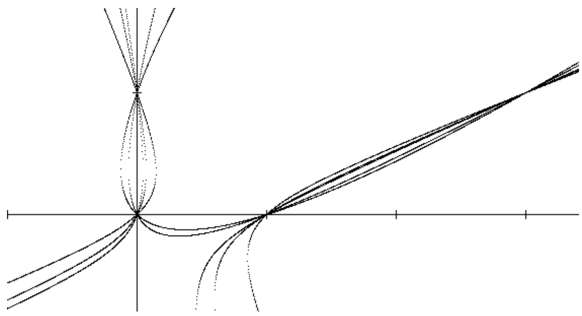
$$\left(\frac{1+m}{1-m\,p}\,,\,\frac{1+p}{1-m\,p}\right)$$

vérifie l'équation de droite : $x - my - 1 = 0$.

Exemples. $b = 2a$:



$b = 2a + 1$:



On déduit une démonstration simple du résultat suivant :

Il passe une seule conique par 5 points donnés, tels que trois d'entre eux soient non alignés.

Soit 5 points A, B, C, D, E, tels que trois d'entre eux soient non alignés. Prenons comme repère $(A, \vec{AB} ; \vec{AC})$. Les coniques passant par A, B, C, D forment une droite de coniques ; Les coniques passant par A, B, C, E forment une droite de coniques.

Si ces deux droites de coniques étaient parallèles, les points D et E seraient, d'après ce qui précède, sur une droite d'équation

$$x - my - 1 = 0,$$

donc ils seraient alignés avec $A(1, 0)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les deux droites de conique se coupent donc en un point $(a ; b)$ du plan conique. Ce point correspond à une seule conique passant par A, B, C, D, E.

Droite de coniques $b = m\,a + p$, dans le cas $mp = 1$.

Dans le cas $mp = 1$, on remarque que

$$\begin{aligned} b^2 - 4\,a &= \left(m\,a + \frac{1}{m}\right)^2 \\ &= m^2\,a^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2\,a \\ &= \left(m\,a - \frac{1}{m}\right)^2 \end{aligned}$$

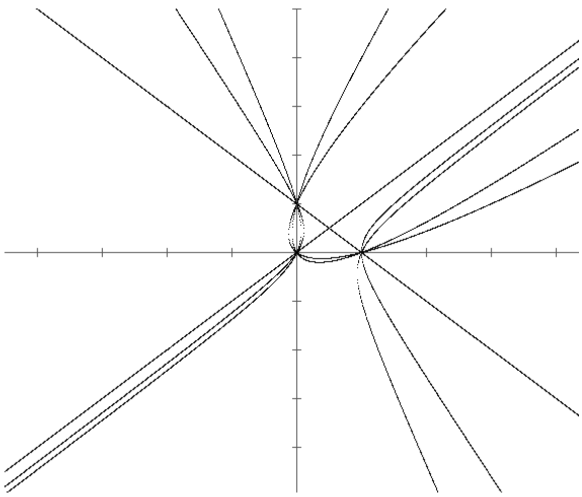
On sait alors que les coniques sont des hyperboles et une parabole. La direction des asymptotes est donnée par le calcul du début soit ici

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\left(\left(m\,a + \frac{1}{m}\right) \pm \left(m\,a - \frac{1}{m}\right)\right)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = m\,a \text{ ou } \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{m}$$

Cette dernière est indépendante de a, c'est aussi la direction de l'axe de la parabole. Toutes les coniques ont des asymptotes parallèles.

Exemple. $b = a + 1$:



Coniques dont les centres sont alignés, une hyperbole dans le plan conique.

Lorsque la conique n'est pas une parabole, on peut chercher son centre. Pour cela on écrit l'équation dans un nouveau repère d'origine Ω (α ; β). On remplace donc x par $X + \alpha$ et y par $Y + \beta$. Cela donne une nouvelle équation :

$$- a X^2 + b X Y - Y^2 + X (a - 2 a \alpha + b \beta) + Y (\alpha b - 2 \beta + 1) - a \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

Pour que Ω soit le centre (de symétrie) il faut que les coefficients de X et Y soit nuls (si $M(X;Y)$ vérifie l'équation, $M'(-X;-Y)$ doit la vérifier aussi). Ainsi on résout le système :

$$- 2 a \alpha + b \beta = - a$$
$$b \alpha - 2 \beta = - 1.$$

Le centre a donc pour coordonnées :

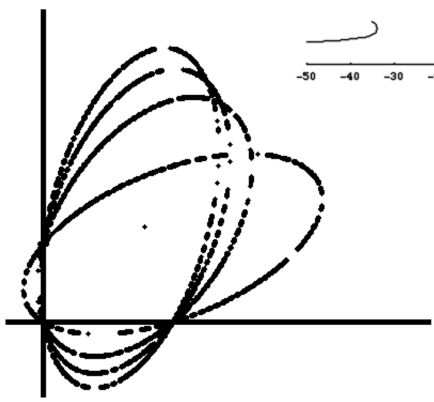
$$\alpha = \frac{2 a + b}{4 a - b^2} \; ; \; \beta = \frac{2 a + a b}{4 a - b^2}$$

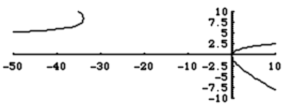
Ecrivons que le centre appartient à une droite fixe donnée (m et p étant deux constantes) :

$$\frac{2 a + a b}{4 a - b^2} = m . \frac{2 a + b}{4 a - b^2} + p$$

$$2 a + a b = 2 m a + m b + 4 p a - p b^2$$
$$\text{b } a + p b^2 - m b + a (2 - 2 m - 4 p) = 0.$$

m et p étant des constantes, l'ensemble des points $M(a, b)$ est une **hyperbole**. En effet, en utilisant les formules du début, on a bien une forme commençant par $AX^2 + BXY + CY^2$ avec $B^2 - 4AC > 0$ ($A = 0$, $B = 1$, $C = p$, a étant l'abscissse X, et b l'ordonnée Y). Exemple : l'hyperbole d'équation $2b^2 + ab + b - 4a = 0$ dans le plan "conique" correspond aux coniques ayant leur centres sur la droite $y = - x + 2$.





Coniques tangentes à une même droite, une parabole dans le plan conique

Equation de la conique :

$$a (x - x^2) + bxy + y - y^2 = 0.$$

Equation de la droite : $u\, x + v\, y + w = 0$. On écrit $y = (- u\, x - w)/v$, on remplace dans l'équation de la conique :

$$av^2(x-x^2) - bx(ux+w) - (ux+w) - (ux+w)^2 = 0$$
$$(-av^2-buv-u^2)x^2+(av^2-bvw-uv-2uw)x-wv = 0$$

Cette équation du second degré doit avoir un discriminant nul pour avoir une racine double :

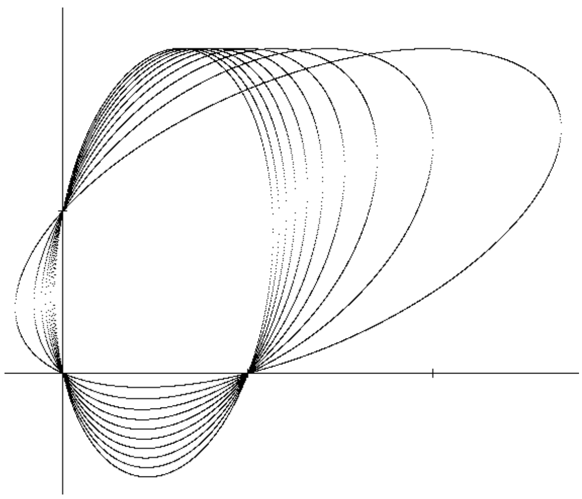
$$(av^2-bvw-uv-2uw)^2 - 4 (av^2+buv+u^2) (wv+w^2) = 0,$$

u, v, w étant des constantes. L'ensemble des points $M(a, b)$ est une **parabole**. En effet, en utilisant les formules du début, on a une forme commençant par $AX^2 + BXY + CY^2$, avec $B^2 - 4\, A\, C = 0$. ($A = v^4$, $B = 2v^3w$, $C = v^2w^2$), a étant l'abscissse X, et b l'ordonnée Y).

Exemple : la parabole d'équation

$$4b^2 + a^2 + 4ab - 8a = 0$$

dans le plan "conique" correspond aux coniques tangentes à la droite $y = 2$.



Pôles d'une droite.

Suivant une idée du chercheur, nous cherchons des propriétés du "pôle" d'une droite Δ fixe par rapport à la conique d'équation $a\,(x - x^2) + bxy + y - y^2 = 0$, c'est-à-dire le point d'intersection des deux tangentes à la conique aux points où celle-ci coupe Δ. Par exemple, à quoi correspondent des pôles alignés, lorsque a et b varient?

Dans un premier temps, nous cherchons l'équation des tangentes.

Pour écrire l'équation de la tangente en A, nous remarquons que, près du point A, les termes du second degré x^2, y^2, xy, sont négligeables devant ceux du premier degré. Si on les supprime dans l'équation de la conique, on trouve l'équation de la tangente :

$$a\,x + y = 0.$$

Pour écrire l'équation de la tangente en un point quelconque $M(\gamma, \beta)$, nous prenons la même méthode, en changeant auparavant de repère, afin que M soit l'origine du nouveau repère. Donc nous posons

$$X = x - \gamma$$
$$Y = y - \beta$$

soit

$$x = X + \gamma$$
$$y = Y + \beta$$

L'équation de la conique s'écrit dans le nouveau repère:

$$a(X+\gamma) - a(X+\gamma)^2 + b(X+\gamma)(Y+\beta) + (Y+\beta) - (Y+\beta)^2 = 0.$$

Le terme constant $(a\gamma - a\gamma^2 + b\gamma\beta + \beta - \beta^2)$ est nul puisque M est sur la conique et en éliminant les termes de degré 2 on obtient :

$$X\,(a - 2a\gamma + b\beta) + Y\,(b\gamma - 2\beta + 1) = 0$$

soit, dans le repère de départ, et après simplification en tenant compte de $a\gamma - a\gamma^2 + b\gamma\beta + \beta - \beta^2 = 0$, la tangente au point $M(\gamma, \beta)$ a pour équation :

$$(a - 2a\gamma + b\beta)x + (b\gamma - 2\beta + 1)y + a\gamma + \beta = 0$$

Exemples.

• Pôle de l'axe des abscisses, soit intersection des tangentes en $A(0, 0)$ et $B(1, 0)$. Ses coordonnées vérifient le système

$$a\,x + y = 0$$
$$-a\,x + (b + 1)\,y + a = 0$$

C'est donc le point $\left(\dfrac{1}{b+2}\,;\dfrac{a}{b+2}\right)$.

Si on écrit que ces pôles sont alignés, a et b vérifient alors une équation de la forme $A\,a + B\,b + C = 0$. Les coniques correspondantes forment une droite de coniques.

• Pôle de l'axe des ordonnées, même chose. Les pôles alignés correspondent à une droite de coniques.

• Pôle de la droite $y = x$, soit intersection des tangentes en $A(0,0)$ et $M(\gamma,\gamma)$ avec $\gamma = \dfrac{a+1}{a-b+1}$.

D'après nos calculs le pôle est le point

$$\left(\frac{a+1}{b\,(a-1)}\,;\frac{-a\,(a+1)}{b\,(a-1)}\right).$$

On écrit que ces pôles sont alignés, a et b vérifient alors une équation de la forme $Aa^2 + Bab + Ca + Db + E = 0$. Les coniques correspondantes forment une hyperbole de coniques. Ceux qui ont du courage peuvent chercher les pôles d'autres droites.

Trouvera-t-on un jour une ellipse de coniques ?