géométrie sur un quadrillage

par Samira Erfad, lycée Paul Eluard de Saint-Denis (93200) et Armand Bonda, Collège Jean Vilar de Villetaneuse (93430)

enseignants : Adrien Fryc, Alain Huet, Nolwen Labbé-Poquet

chercheur : François Parreau

clg de Villetaneuse, lycées d'Epinay & Saint Denis (93) — ***géométrie sur quadrillage***
On cherche à calculer les surfaces de polygones dont les sommets sont placés sur des intersections d'un quadrillage, en commençant par les triangles.

Notre projet consiste à calculer l'aire d'un polygone placé dans un quadrillage, en tenant compte du nombre de points sur le bord et à l'intérieur de la figure. Au cours de notre recherche nous avons découvert une formule qui concerne l'objet de notre sujet, appelée formule de Pick :

$$i + \frac{b}{2} - 1$$

Avec :

$i \rightarrow$ le nombre de nœuds* du quadrillage à l'intérieur de la figure.

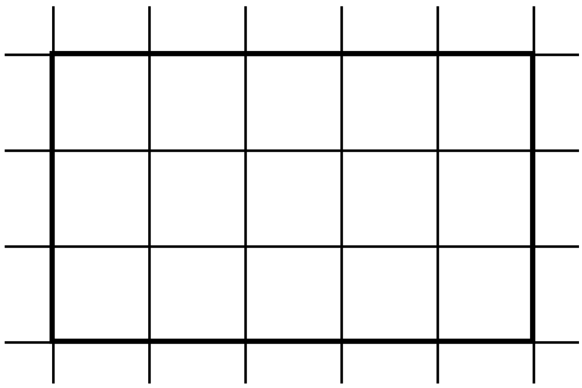
$b \rightarrow$ le nombre de nœuds* du quadrillage sur le bord de la figure.

(* nœud : point d'intersection de deux lignes.)

Cette formule donne l'aire de la figure.

Utilisation de la formule.

Exemple : cas du rectangle.



Avec la formule conventionnelle :

$$L \times l \ = \ 5 \times 3 = 15$$

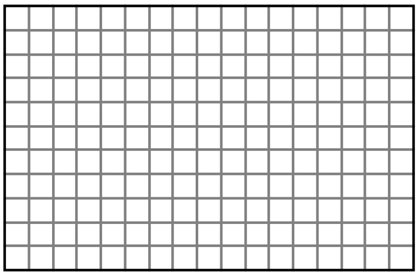
Avec la formule de Pick :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = 8 + \frac{16}{2} - 1 = 15$$

On obtient bien le même résultat.

Démonstrations.

Démonstration pour le rectangle :



p = longueur du rectangle.

q = largeur du rectangle.

On appelle « A » l'aire du rectangle.

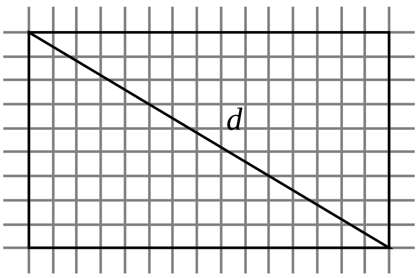
$$i = (p - 1)\,(q - 1).$$
$$b = (p - 1) \times 2 + (q - 1) \times 2 + 4.$$

$i + b/2 - 1$
$= (p-1)(q-1) + [(p-1)\times 2 + (q-1)\times 2 + 4]/2 - 1$
$= pq$

Donc $A = pq = i + b/2 - 1$.

Conclusion : la formule de Pick est vraie pour le rectangle.

Démonstration pour le triangle rectangle :



d : le nombre de nœuds du quadrillage sur l'hypoténuse du triangle rectangle moins les deux extrémités de l'hypoténuse.

On veut montrer que la formule donne $pq/2$, c'est-à-dire que : $i + b/2 - 1 = pq / 2$.

$$i = [(p - 1)\,(q - 1) - d] / 2$$
$$\text{et } b = (p - 1) + (q - 1) + d + 3$$

On a donc : $i + b/2 - 1$
$= [(p-1)(q-1)-d]/2 + [(p-1)+(q-1)+d+3]/2 - 1$
$= pq / 2$

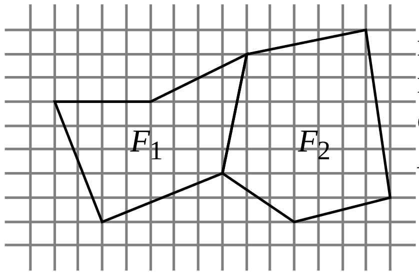
Donc : $A = pq / 2 = i + b / 2 - 1$.

Conclusion : La formule de Pick est juste pour le triangle rectangle.

Propositions de recollement :

Avant de passer aux démonstrations concernant les triangles quelconques, nous avons établi les deux propositions suivantes :

Première proposition :
On a 2 figures F_1 et F_2, telles que la formule de Pick est vraie pour le calcul de l'aire de F_1 et le calcul de l'aire de F_2. Alors elle est vraie pour calculer l'aire de $F_1 \cup F_2$ dans le cas suivant (F_1 et F_2 n'ont pas de point intérieur en commun) :

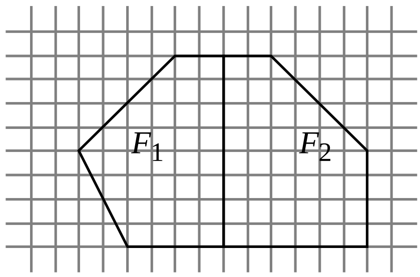


d : est le nombre de nœuds en commun à F_1 et F_2

aire F = aire (F_1) + aire (F_2)
$i = i_1 + i_2 + d$; $b = b_1 + b_2 - 2d - 2$
$i_1 + b_1/2 - 1 + i_2 + b_2/2 - 1$
$= i_1 + i_2 + b_1/2 + b_2/2 - 2$
$= i_1 + i_2 + (b_1 + b_2)/2 - 2$
$= i_1 + i_2 + d + (b_1 + b_2 - 2d)/2 - 2$
$= i_1 + i_2 + d + (b_1 + b_2 - 2d - 2)/2 - 1$
$= i + b/2 - 1$.

Deuxième proposition :

On a une figure $F = F_1 \cup F_2$.
Si la formule est vraie pour le calcul de l'aire de F et pour celui de F_1, alors elle est vraie pour F_2, dans le cas suivant :

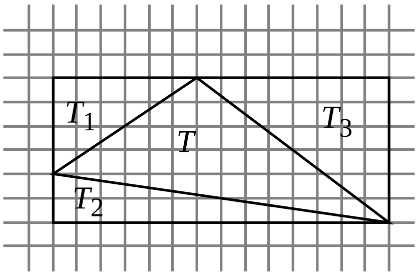


les triangles quelconques (dont les sommets sont sur les nœuds du quadrillage) :

Après avoir prouvé que la formule de Pick est vraie pour les rectangles et les triangles rectangles, démontrons qu'elle fonctionne pour les triangles quelconques dont les sommets sont sur les nœuds du quadrillage.

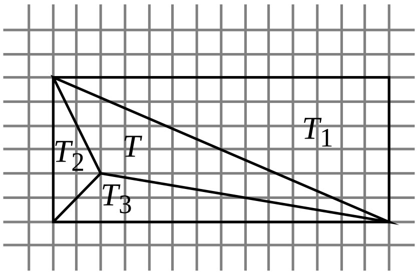
Nous avons distingué deux types de triangles quelconques :

type 1



* $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$ (* R est le rectangle circonscrit au triangle T.) Comme la formule est vraie pour le calcul de l'aire de R, de T_1, de T_2, de T_3, alors elle est vraie pour T.

type 2



$R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Comme la formule est vraie pour le calcul de l'aire de R, de T_1, de T_2, de T_3, alors elle est vraie pour celui de T.

Dans ces deux types de triangles quelconques nous avons utilisé la deuxième proposition.

Conclusion.

Quel que soit le polygone dont les sommets sont sur des nœuds du quadrillage, nous pouvons calculer son aire avec la formule de Pick, en le décomposant ainsi :