

## jeu de Nim

par Sonia Morin, Trang Pham, Anne Jamet (Seconde et 1<sup>er</sup> S) du lycée Romain Rolland d'Argenteuil (95)

enseignantes : Sabine Giros, Dominique Guy

chercheur : Loïc Allys

lycées Romain Rolland d'Argenteuil (95) & Le Més sur Seine (77) — *Jeu de Nim : quel est le stratégie pour gagner ?*

Il s'agit d'un jeu : on a deux tas d'allumettes ; chacun des joueurs joue à son tour et enlève des allumettes d'un ou des deux tas. Le vainqueur est celui qui enlève la dernière allumette.

### Règle du jeu.

On a deux tas d'allumettes. Chaque joueur (en l'occurrence, deux), et à tour de rôle :

- soit enlève autant d'allumettes qu'il veut dans un tas et rien dans l'autre tas

- soit enlève "à peu près autant" d'allumettes dans chaque tas. C'est-à-dire  $n$  dans le premier tas et  $n$ ,  $n-1$  ou  $n+1$  dans le second tas.

Celui qui enlève la dernière allumette a gagné.

Il est raisonnable de penser que le premier joueur est avoué.

Mais : Il y a des situations initiales où le premier joueur perd :

Tas 1 : 0 1 2 4  
Tas 2 : 0 3 6 10

### Objectif de la recherche :

- Trouver les situations perdantes
- Donner une méthode pour gagner (quand cela est possible)

### Comment sommes-nous partis ?

Nous avons procédé par essais successifs afin de trouver des pistes. Nous avons d'abord réexpliqué la règle du jeu, puis nous en avons déduit plusieurs méthodes.

**Le premier joueur gagne****Les situations gagnantes.**

Ce sont les nombres qu'il y a dans chaque tas au début des situations gagnantes pour le premier joueur.

	A	B	C	D*	E	F
Tas 1	$n$	$n$	$n$	$n$	$n$	$n$
Tas 2	$n$	$n-1$	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$2n$

\* Cas particulier : pour  $n = 1$ , la situation (1 ; 3) est gagnante pour le second joueur. Et, pour  $n < 7$ , il y a aussi :

	G	H
Tas 1	$n$	$n$
Tas 2	$n+1$	$n+11$

**Méthodes pour gagner.**

	A	B	C	D	E
Tas 1	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$
Tas 2	$n$	$n-1$	$n$	$n+1$	$n+2$

On remarque que la différence entre le tas 2 et le tas 1 est toujours paire, de plus, un nombre d'allumettes apparaît une et une seule fois.

**Remarque sur les situations F, G et H :** Ces situations n'ont pas été démontrées, néanmoins, tout au long de notre recherche, nous avons acquis l'intime conviction qu'elles sont exactes. De plus, toutes les fois où nous avons utilisé ces situations, nous avons pu constater que le premier joueur gagnait. Ces résultats restent à votre disposition afin que (pour ceux qui le souhaiteraient) vous le démontriez avec nous.

**Conséquence.** Lorsque la différence entre le second tas et le premier tas est impaire, c'est lui gagne.

**Exemple :** la situation (4 ; 7). C'est la situation  $n$  et  $n+3$ , la différence entre le tas 2 et le tas 1 est de 3, elle est impaire : cette situation est gagnante pour le premier joueur.

**Le second joueur gagne****Les situations gagnantes.**

Ce sont les nombres qu'il y a dans chaque tas au début des situations gagnantes pour le second joueur :

	Tas 1	$n$	$n$	$n$	$n$
	Tas 2	$n+4$	$n+5$	$n+6$	$n+7$

\*  $p \geq 4$

**Remarques.**

Quelques situations gagnantes pour le second joueur : on a pris la convention de mettre dans le tas 1 le nombre d'allumettes le plus petit.

**Tableau T**

Tas 1	1	2	4	5	7	8	9	11
Tas 2	3	6	10	13	17	20	23	27
(Tas 2)-(Tas 1)	2	4	6	8	10	12	14	16

On remarque que la différence entre le tas 2 et le tas 1 est toujours paire, de plus, un nombre d'allumettes apparaît une et une seule fois.

**Énoncé 1 :** Un nombre ne peut être utilisé deux fois dans le tableau T des situations gagnantes pour le second joueur.

**Exemple :** Pourquoi on ne peut pas retrouver 20 ? 20 correspond à une situation du tableau T, la situation (20 ; 8). Considérons la situation (20 ; 8) :

- Soit  $n < 8$  : alors le premier joueur peut se ramener à une situation du tableau T et donc être sûr de gagner.
- Soit  $8 < n < 20$  : alors le premier joueur se ramène à la situation (8 ; 20) et est sûr de gagner.
- Soit  $n > 20$  : alors le premier joueur se ramène à la situation (8 ; 20) et est sûr de gagner.

**Enoncé 2 :** Tout nombre apparaît une fois dans le tableau 7 et la différence entre les deux tas est toujours paire et consécutive. [On comment construire le tableau des situations gagnantes pour le second joueur ?] (0 ; 0) puis (1 ; 3) sont les situations initiales gagnantes pour le second joueur.

**Y a-t-il une situation gagnante avec 2 ?**

- (2 ; 3) ne convient pas car le premier joueur enlève (1 ; 0)
- (2 ; 4) ne convient pas car le premier joueur enlève (1 ; 1)
- (2 ; 5) ne convient pas car le premier joueur enlève (1 ; 2)
- (2 ; 6) convient car le premier joueur n'arrive pas à se ramener à la situation (1 ; 3)

**Y a-t-il une situation gagnante avec 4 ?** (on ne se pose pas la question avec 3 qui apparaît déjà dans le tableau).

- (4 ; 5) ne convient pas car le premier joueur enlève (3 ; 2)
- (4 ; 6) ne convient pas car le premier joueur enlève (3 ; 3)
- (4 ; 7) ne convient pas car le premier joueur enlève (3 ; 4)
- (4 ; 8) ne convient pas car le premier joueur enlève (2 ; 2)
- (4 ; 9) ne convient pas car le premier joueur enlève (2 ; 3)
- (4 ; 10) convient car le premier joueur ne peut se ramener à la situation (1 ; 3) ni (2 ; 6)

**Y a-t-il une situation gagnante avec 5 ?**

- (5 ; 6) ne convient pas car le premier joueur enlève (3 ; 0)
- (5 ; 7) ne convient pas car le premier joueur enlève (4 ; 4)
- (5 ; 8) ne convient pas car le premier joueur enlève (3 ; 2)
- (5 ; 9) ne convient pas car le premier joueur enlève (3 ; 3), etc. Puis :
- (5 ; 13) convient car le premier joueur ne peut se ramener à une situation précédente.

Ainsi, de proche en proche, on construit le tableau (**Tableau 1**, page suivante) pour une différence possible de prise de 1 entre les deux tas.

**Généralisation.**

Suivant le même principe que pour un écart possible de 1, on construit les tableaux des situations gagnantes pour le second joueur dans les cas où la différence de prise entre les deux tas est de 0 (c'est-à-dire que l'on prend le même nombre d'allumettes dans les deux tas) : **Tableau 0** ; puis de 2 : **Tableau 2**.

**Tableau 1**

Tas 1	0	1	2	4	5	7	8	9	11	12	14	15	16	18	19	21	22	24	25
Tas 2	0	3	6	10	13	17	20	23	27	30	34	37	40	44	47	51	54	58	61
D	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
Tas 1	26	28	29	31	32	33	35	36	38	39	41	42	43	45	46	48	49	50	52
Tas 2	64	68	71	75	78	81	85	88	92	95	99	102	105	109	112	116	119	122	126
D	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74
Tas 1	53	55	56	57	59	60	62	63	65	66	67	69	70	72	73	74	76	77	79
Tas 2	129	133	136	139	143	146	150	153	157	160	163	167	170	174	177	180	184	187	191
D	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	102	104	106	108	110	112

D représente la différence entre les deux tas d'allumettes

**Tableau 0**

Tas 1	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29
Tas 2	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47
D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Tas 1	30	32	33	35	37	38	40	42	43	45	46	48	50	51	53	55	56	58	59
Tas 2	49	52	54	57	60	62	65	68	70	73	75	78	81	83	86	89	91	94	96
D	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Tas 1	61	63	64	66	67	69	71	72	74	76	77	79	80	82	84	85	87	88	90
Tas 2	99	102	104	107	109	112	115	117	120	123	125	128	130	133	136	138	141	143	146
D	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56

**Tableau 2**

Tas 1	0	1	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15	16	18	19	20	22	23
Tas 2	0	4	8	12	17	21	25	30	34	38	43	47	51	55	60	64	68	73	77
D	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
Tas 1	24	26	27	28	29	31	32	33	35	36	37	39	40	41	42	44	45	46	48
Tas 2	81	86	90	94	98	103	107	111	116	120	124	129	133	137	141	146	150	154	159
D	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111
Tas 1	49	50	52	53	54	56	57	58	59	61	62	63	65	66	67	69	70	71	72
Tas 2	163	167	172	176	180	185	189	193	197	202	206	210	215	218	223	228	232	236	240
D	114	117	120	123	126	129	132	135	138	141	144	147	150	153	156	159	162	165	168