les cycles

par Cheyrel Maboundou (seconde) du lycée Romain Rolland d'Argenteuil (95)

enseignantes : Sabine Giros, Dominique Guy

chercheur : Loïc Allys

[NDLR : cet article complète celui envoyé par le lycée Georges Sand, Le Mée sur Seine, concernant les suites de nombres qui cyclent, et intitulé « somme des cubes des chiffres », qu'on trouvera page 41.]

On considère la suite qui à un nombre associe la somme du carré de ses chiffres. Exemple :

$$
\begin{aligned}
125 &\to 1^2 + 2^2 + 5^2 = 30 \\
&\to 3^2 + 0^2 = 9 \\
&\to 9^2 = 81 \\
&\to 8^2 + 1^2 = 65 \\
&\to 6^2 + 5^2 = 61 \\
&\to 6^2 + 1^2 = 37
\end{aligned}
$$

Il s'agit de voir pourquoi cette suite cycle, c'est-à-dire que l'on retombe forcément sur un des termes de la suite à un moment donné.

On considère l'application T définie par :

$$
\begin{aligned}
T : \mathrm{N}^* &\to \mathrm{N}^* \\
a = q_1 q_2 \ldots q_n &\to T(a) = q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2,
\end{aligned}
$$

soit T : somme des carrés des chiffres d'un nombre.

Soit $N \in \mathrm{N}^*$, on note $t(N)$ le nombre de chiffres du nombre N. Par exemple, $t(953\ 320) = 6$. Si N a n chiffres ($t(N) = n$) alors $N \leq 10^n - 1$. Or $T(10^n - 1) = 9^2 n$. Donc

$$T(N) \leq 9^2 n \Leftrightarrow T(N) \leq 9^2 t(N) \ (1),$$

et en réitérant l'application T k–1 fois, on a

$$(\underbrace{T\mathrm{o}T\mathrm{o}T\ldots\mathrm{o}T}_{k \text{ termes}})(N) \leq 9^2 t((\underbrace{T\mathrm{o}T\ldots\mathrm{o}T}_{k-1 \text{ termes}})(N)).$$

En notant $T^k = \underbrace{T\mathrm{o}T\mathrm{o}T\ldots\mathrm{o}T}_{k \text{ termes}}$, on obtient :

$$T^k(N) \leq 9^2 t(T^{k-1}(N)) \ (1').$$

Soit (n_k) la suite définie par $n_0 = t(N)$ et $n_{k+1} = t(9^2 n_k)$ (2). Ainsi, en utilisant (1') et (2), on obtient que $t(T^k(N)) \leq n_k$ (3).

On se propose donc de démontrer que la suite $T^k(N)$ cycle, c'est-à-dire que dans l'ensemble $E = \{T^k(N), k \in \mathrm{N}^*\}$, il existe $p \neq p'$ tels que $T^p(N) = T^{p'}(N)$.

On se place d'abord dans le cas où $t(N) \leq 3$ (soit $N \leq 10^3 - 1$).

Raisonnons par l'absurde en posant l'hypothèse (H) que l'on a toujours $T^p(N) \neq T^{p'}(N)$ pour $p \neq p'$.

Comme $n_0 = t(N) \leq 3$, on a $9^2 n_0 \leq 243$ et donc, d'après (1) $T(N) \leq 243$. Si on introduit l'ensemble A tel que

$$A = \{n, n \in \mathrm{N} \ / \ 1 \leq n \leq 243\},$$

on a $T(N) \in A$. Par récurrence, on montre que $T^k(N) \in A$ (en utilisant (1')), ou encore : $E \subset A$.

L'appartenance à A signifie que $T^k(N)$ peut prendre 243 valeurs possibles entre 1 et 243. D'après (H), pour k compris entre 1 et 243, $T^k(N)$ ont pris les 243 valeurs distinctes possibles de A. Or $T^{244}(N) \in A$ et il y a alors une contradiction avec l'hyphothèse (H) de départ. On a établi le fait que la suite $T^k(N)$ cycle en se limitant au cas où $t(N) \leq 3$.

Généralisons ce résultat quel que soit $t(N) \in \mathrm{N}^*$.

On va montrer que :

pour $t(N) > 3$, $\exists\, k \ / \ T^k(N) \leq 243$,

et qu'ainsi, comme précédemment, $T^{k+243}(N)$ prend une valeur déjà obtenue de A.

Un nombre a q chiffres lorsqu'il est compris entre 10^{q-1} et 10^q (exclu). Avec les notations initiales, $n_0 = t(N)$ et $n_1 = t(9^2 n_0)$:

$$10^{n_1 - 1} \leq 9^2 n_0 < 10^{n_1} \Leftrightarrow n_1 - 1 \leq \log(9^2 n_0) < n_1$$

$$\Leftrightarrow \log(9^2 n_0) < n_1 < \log(9^2 n_0) + 1,$$

et comme $n_1 \in \mathrm{N}^*$, on a :

$$E[\log(9^2 n_0)] < n_1 \leq E[\log(9^2 n_0) + 1]$$
$$\Rightarrow n_1 = E[\log(9^2 n_0) + 1],$$

$E(x)$ désignant la partie entière de x.

Posons : $\tilde{n}_0 = n_0$ et $\tilde{n}_1 = \log(9^2 \tilde{n}_0) + 1$, on a $n_1 = E(\tilde{n}_1)$. De manière générale, on aura $n_k = E(\tilde{n}_k)$ et on peut vérifier que $n_k = \log(9^2 \tilde{n}_{k-1}) + 1$.

C'est ainsi que :

(4) $$n_{k+1} = E(\tilde{n}_{k+1}) = E[\underbrace{\log(9^2\log(9^2\log(\ldots\log}_{k+1 \text{ termes log}}(9^2 n_0)+1\ldots)+1)+1)+1]$$

Etudions maintenant la suite $(\tilde{n}_k)$. Cette suite est telle que $\tilde{n}_0 = n_0$ et $\tilde{n}_{k+1} = \log(9^2 \tilde{n}_k) + 1$

$$\Leftrightarrow \tilde{n}_{k+1} = \log(9^2 \tilde{n}_k) + \log 10$$
$$\Leftrightarrow \tilde{n}_{k+1} = \log(810\, \tilde{n}_k).$$

Si une limite l de la suite $(\tilde{n}_k)$ existe, on aura $l = \log(810\, l) \Leftrightarrow l - \log(810\, l) = 0$. Soit la fonction f telle que $f(x) = x - \log(810\, x)$. On cherche x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Pour cela, on utilisera le **théorème** suivant : si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et si $f(a).f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]a, b[$.

Dans l'intervalle $[3, 7/2]$, on peut vérifier que la fonction f est continue et monotone. De plus :

$$f(3).f(7/2) = (3 - \log 2430).(35 - \log 2835)$$
$$= -0.018 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Ainsi, $f(3).f(7/2) < 0$ et de ce fait, il existe un unique point $x_0 \in\ ]3, 7/2[$ tel que $f(x_0) = 0$ et $l = x_0$.

Ainsi, $\lim \tilde{n}_k = l$. Donc il existe un rang k_0 pour lequel $\tilde{n}_{k_0} \in\ ]3, 7/2[$; comme $n_k = E(\tilde{n}_k)$, $n_{k_0} = 3$.

Alors $T^{k_0}(N) \leq 243$ et, en reprenant le raisonnement du cas précédent, $\exists\, p \neq k_0 + 244 \ / \ T^p(N) = T^{k_0+244}(N)$ ce qui signifie donc que la suite $T^k(N)$ cycle pour tout $N \in \mathrm{N}^*$.

Il reste maintenant à chercher le nombre $T^k(N)$ sur lequel la suite cycle …

Bon courage à tous !