damiers et cannibales

par Guillaume Akbaraly, Zeynel Anil, Zouhir Belbouab, Eric Nyamaku du Collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93)

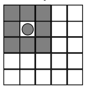
enseignants : Pierre Lévy, Mauricette Ramillon

chercheurs : Olivier Bodini, Pierre Duchet

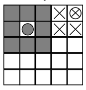
— ***damiers et cannibales***
Deux joueurs posent alternativement des pions sur un damier ; aucune pièce n'est déplacée ; aucune de ses pièces ne doit être en prise par une pièce adverse. Un joueur perd s'il ne peut plus jouer. Qu'est-ce qu'une stratégie ? Peut-on gagner à coup sûr ?

Notre sujet s'intitule “ damiers et cannibales ”. Il s'agit d'un jeu qui se joue à deux sur un damier de taille quelconque. Chaque joueur pose à tour de rôle un pion sur le damier. Un pion contrôle toutes les cases situées autour de lui. Voici un exemple de partie.

coup 1

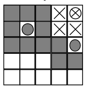


coup 2

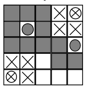


Le premier joueur au coup n°1 pose son pion gris sur une case et toutes les cases marquées en gris deviennent interdites pour le reste de la partie (y compris pour lui-même). Le joueur suivant au coup n°2 joue et son pion (marqué d'une croix) contrôle toutes les cases marquées d'une croix. Et ainsi de suite, à tour de rôle.

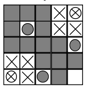
coup 3



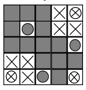
coup 4



coup 5



coup 6



Au coup n°6, le joueur gris ne peut plus poser de pions, il a perdu la partie. Le but du jeu est donc d'être le dernier à poser un pion sur le damier. ***Notre objectif est de trouver une stratégie permettant de gagner à tous les coups.***

Analyse

Après avoir joué de nombreuses parties, nous nous sommes demandé si on pouvait connaître d'avance le nombre minimum et le nombre maximum de pions pour contrôler un damier. Nous avons commencé à réfléchir sur des damiers carrés. Appelons *Min* et *Max* le nombre minimum et maximum de pions pour contrôler le damier. Nous sommes parvenus à établir le tableau suivant :

Nombre de cases sur le côté du damier (N)	Nombre minimum de pions pour contrôler le damier (*Min*)	Nombre maximum de pions pour contrôler le damier (*Max*)
1	1	1
2	1	1
3	1	4
4	4	4
5	4	9
6	4	9
7	9	16
8	9	16
9	9	25
10	16	25
11	16	36
12	16	36

On remarque que *Min* varie de 3 en 3 et que *Max* varie de 2 en 2. Cela nous a donné l'idée d'une formule générale permettant d'obtenir ces nombres quelle que soit la taille du damier et même s'il n'est pas carré.

On appelle L le nombre de cases sur la longueur et l le nombre de cases sur la largeur. On note $Min_{L,l}$ le nombre minimum de pions pour contrôler le damier et $Max_{L,l}$ le nombre maximum de pions.

Voici les formules trouvées

L est le nombre de cases sur la longueur, l est le nombre de cases sur la largeur.

Nombre minimum de pions pour contrôler le damier ($Min_{L,l}$)

$L = 3Q + R$ et $l = 3q + r$

Si $R = 0$ et $r = 0$ alors $Min_{L,l} = Q \times q$

Si $R \neq 0$ et $r \neq 0$ alors $Min_{L,l} = (Q + 1)\,(q + 1)$

Si $R = 0$ et $r \neq 0$ alors $Min_{L,l} = Q\,(q + 1)$

Si $R \neq 0$ et $r = 0$ alors $Min_{L,l} = (Q + 1) \times q$

Nombre maximum de pions pour contrôler le damier ($Max_{L,l}$)

Si L et l sont pairs $Max_{L,l} = \left(\frac{L}{2} \times \frac{l}{2}\right)$

Si L et l sont impairs $Max_{L,l} = \left(\frac{L+1}{2} \times \frac{l+1}{2}\right)$

Si L est pair et l impair $Max_{L,l} = \left(\frac{L}{2} \times \frac{l+1}{2}\right)$

Si L est impair et l pair $Max_{L,l} = \left(\frac{L+1}{2} \times \frac{l}{2}\right)$

Ces formules sont confirmées par les résultats expérimentaux. Par exemple, si le damier est un carré de 7 sur 7, on a $L = 7$, $l = 7$ et

$$Min_{7,7} = (2 + 1)\,(2 + 1) = 9,$$

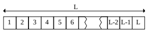
$$Max_{7,7} = \left(\frac{7+1}{2} \times \frac{7+1}{2}\right) = 16.$$

Nous avons tout de même cherché à comprendre et à justifier ces formules.

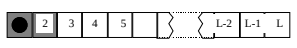
Voici les preuves :

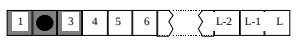
Pour le calcul de Min $_{L,l}$

Prenons d'abord le cas d'un damier composé d'une seule ligne et numérotons les cases en partant de la gauche.



Pour contrôler toute la ligne, il faudra obligatoirement contrôler la première case. Pour cela, il n'y a que 2 possibilités :

1er cas : 

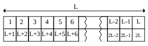
2ème cas : 

Puisque l'on cherche à utiliser le moins de pions possibles pour contrôler cette ligne, la deuxième solution est meilleure car dans le premier cas le pion contrôle les cases 1 et 2 alors que dans le deuxième cas, il contrôle les cases 1, 2 et 3. Il reste à contrôler une bande de longueur $L - 3$ dont la première case est la case 4. Le meilleur moyen de contrôler cette case est de poser un pion sur la case 5 d'après ce que l'on a dit précédemment.

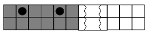
Et ainsi de suite … Le meilleur moyen de contrôler une ligne complète est donc de disposer un pion toutes les 3 cases en commençant par la 2ème.

Si $L = 3Q + R$ on a bien $Min_{L,1} = Q$ si $R = 0$ et $Min_{L,1} = Q + 1$ si $R \neq 0$

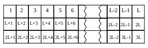
Ajoutons une ligne à notre damier.



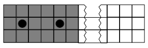
Si la première ligne est contrôlée, alors la deuxième aussi.



Ajoutons une troisième ligne à notre damier.



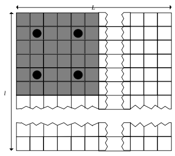
Il suffit de contrôler la ligne du milieu pour contrôler celle du dessus et celle du dessous.



Ainsi $\boldsymbol{Min_{L,1} = Min_{L,2} = Min_{L,3}}$

Si on ajoute une quatrième ligne, il faut à nouveau la contrôler en posant de nouveaux pions ce qui permet de contrôler une 5ème et une 6ème ligne.

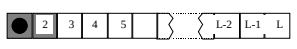
Pour contrôler un damier de longueur L et de largeur l, voilà donc la meilleure disposition.

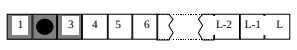


Pour contrôler un damier avec le moins de pions, il suffit de calculer le nombre de paquets de 3 lignes qui constituent ce damier et de le multiplier par le nombre de pions nécessaire pour contrôler une ligne. On retrouve ainsi les formules annoncées au début.

Pour le calcul de $Max_{L,l}$

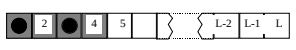
Pour calculer le nombre maximum de pions que l'on peut poser sur un damier, notre raisonnement est basé sur la même idée. Comment contrôler une ligne avec le plus de pions possible ? Pour cela, il faut que chaque pion contrôle le moins de cases possible et que toutes les cases soient contrôlées. Commençons par la case 1.

1[er] cas : 

2[ème] cas : 

Cette fois-ci, c'est le premier cas qui convient.

Il reste à contrôler une bande de longueur $L - 2$ et dont la première case est la case 3. On doit poser un nouveau pion sur la case 3 et on contrôle aussi la case 4.

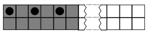


Et ainsi de suite. Les pions sont donc posés de 2 cases en 2 cases en commençant par la première.

Donc $Max_{L,1} = \frac{L}{2}$ si L est pair

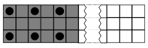
et $Max_{L,1} = \frac{L+1}{2}$ si L est impair.

Si on ajoute une deuxième ligne, elle est déjà contrôlée.



donc $Max_{L,2} = Max_{L,1}$

Si on ajoute une troisième ligne, elle n'est plus contrôlée et il faut recommencer à poser les pions comme pour la première ligne.

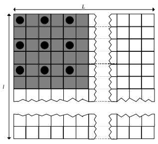


et $Max_{L,3} = 2\ Max_{L,1}$

Si on ajoute une quatrième ligne, elle est déjà contrôlée par les pions de la troisième :

$$Max_{L,4} = Max_{L,3}$$

et ainsi de suite. Voici la disposition pour placer le maximum de pions sur un damier.



Pour contrôler un damier avec le plus de pions, il suffit de calculer le nombre de paquets de 2 lignes qui constituent ce damier et de le multiplier par le nombre de pions nécessaire pour contrôler une ligne. On retrouve ainsi les formules annoncées.

Suivant la taille du damier, nous savons qu'une partie ne pourra se dérouler en moins de $Min_{L,1}$ coups et en plus de $Max_{L,1}$. Cela ne nous fournit pas de stratégie gagnante, mais ces recherches nous ont donné quelques idées pour en construire.

A la recherche d'une stratégie gagnante.

Il nous semble clair maintenant qu'à tout moment d'une partie, il est possible de connaître en combien de coups au minimum on pourra la terminer. Cette information est capitale. En effet, si un joueur sait que la partie pourrait se terminer en 5 coups et que c'est à son tour de jouer, il a toutes les chances de gagner si lui et son adversaire placent leurs pions comme prévu. Si par contre, c'est à son adversaire de jouer, il doit absolument placer son pion de manière à ce qu'au tour suivant, il reste un nombre impair de coups à jouer.

Voici quelques exemples :

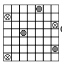
C'est au joueur gris de jouer ; la partie peut se terminer en 2 coups car 2 pions suffisent pour contrôler les 2 zones restantes. Le joueur avec la croix est donc en position de gagner.

Le joueur gris, qui est malin, va donc s'arranger pour qu'il reste toujours 2 zones à contrôler une fois qu'il a joué. C'est maintenant lui qui est en position de force.

Le joueur avec la croix a joué de manière stupide car il ne reste qu'une seule zone à contrôler : il a déjà perdu la partie.

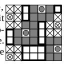
En fait, nous pensons que pour gagner, il faut toujours être en mesure de compter le nombre de coups “ restants ” (c'est-à-dire le nombre de zones à contrôler sur le damier). Si on joue le premier, il faut s'arranger pour que le nombre de coups restants à jouer soit pair (impair si on joue le deuxième).

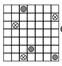
Voici quelques situations :



C'est au joueur gris de jouer.

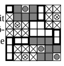
Si son œil est bien exercé, voilà (à droite) ce qu'il doit voir. Il reste 5 zones à contrôler, il est en position de force. Il posera un pion dans l'une des zones possibles.





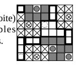
C'est au joueur gris de jouer.

Voilà (à droite) ce qu'il doit voir. Il reste 6 zones à contrôler, il n'est pas en position de force.



Il posera un pion dans l'une des zones possibles en veillant à ne pas la contrôler entièrement. Il ne jouera ni dans la case isolée, ni dans une des zones composées de 2 cases.

Nous avons indiqué (à droite) 2 emplacements possibles pour le pion du joueur gris.



En plaçant son pion ainsi, la zone choisie n'est pas contrôlée intégralement et donc le nombre de coups restants n'aura pas changé.

Cette stratégie est délicate à utiliser car elle nécessite d'avoir une vision parfaite des zones occupées et libres du damier à tout moment d'une partie. En fait, à l'usage, cela n'est pas tout à fait exact, car au départ, lorsque le nombre de coups à jouer est très grand, on peut jouer un peu au hasard. Par contre, plus la partie approche de son dénouement, plus il faut devenir vigilant et compter les coups restants sans erreurs.

Nous avons tenté de faire une liste complète des formes possibles des zones pouvant être contrôlées par un seul pion. Cela afin d'aider les joueurs à les repérer plus rapidement pour compter les coups restants. Nous n'avons pas eu le temps de réaliser cette liste et de plus, cela ne semble pas une aide précieuse. La meilleure méthode consiste à cocher au fur et à mesure les cases interdites car les zones à contrôler apparaissent presque naturellement.

Pour le moment, avec un peu d'entraînement, nous parvenons à gagner contre des joueurs qui jouent au hasard. Nous l'avons vérifié en battant régulièrement un ordinateur qui jouait ainsi. Par contre, contre un adversaire qui applique la stratégie décrite, les parties sont équilibrées. Il semble pourtant qu'en poussant la réflexion plus avant, il soit possible de mieux jouer (en choisissant de créer des zones ayant des formes bien particulières par exemple). Nous n'en avons pas eu le temps cette année, dommage !

[NDLR : c'est effectivement dommage, mais rien n'empêche désormais le lecteur de s'attaquer à la synthèse ; l'exploration menée suppose qu'une solution sur un petit nombre de cases peut s'étendre en une solution à un plus grand nombre de cases, ce qui n'est pas démontré. Essayez de placer deux points sur la terre les plus éloignés l'un de l'autre : c'est possible avec le pôle nord et le pôle sud ; posez-vous la même question avec trois points : c'est possible avec trois points de l'équateur, à 16 667 km les uns des autres, mais si vous aviez gardé vos deux premiers points, vous ne pourrez pas faire mieux que de mettre le troisième sur l'équateur, ce qui ne fera une distance que de 10 000 km avec les deux autres.

Pour les damiers et cannibales, peut-on être sûr que la situation n'est pas la même, et qu'une solution sur un grand damier est forcément obtenue en étendant une solution sur un damier de plus petite taille ?]