les reines sur un échiquier

par Sylvain Dumon (maths spé), Samy Abib (2de), Nouara Machouche (1°ES) du lycée Paul Eluard de Saint-Denis (93)

enseignants : Alain Huet, Nolwen Labbé-Poquet

chercheur : François Parreau

lycée Paul Eluard de Saint Denis (93), ***reine sur un échiquier***
Combien faut-il placer de dames au minimum pour contrôler toutes les cases de l'échiquier ?

Sujet de recherche.
Il s'agit de placer le nombre minimum de reines nécessaires pour contrôler un échiquier de n cases sur n cases ($n \times n$), selon les conventions habituelles régissant le déplacement des reines au jeu d'échec. Par extension, nous appelons échiquier tout damier monocolore de quelque dimension que ce soit, nous appellerons solution tout agencement de reines qui contrôle l'échiquier et réponse le minimum !

Premières étapes de la recherche, sans suite.

méthode aléatoire

La première méthode de recherche a bien sûr été le hasard. Nous avons trouvé des solutions pour les petites valeurs de n (jusqu'à 10) mais sans pouvoir prouver que c'était la réponse.

Recherche abandonnée.

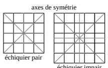
parité

Nous avons essayé de séparer la recherche en singularisant la parité de n. Nous verrons plus loin que cette idée n'est pas stérile. Mais au début, nous avons abandonné.

étude des symétries et des rotations

Sachant que tout carré a quatre axes de symétrie, qu'il est sa propre image dans plusieurs rotations, nous avons bien sûr trouvé que pour une solution donnée, il y en avait plusieurs (!) déduites de celle-ci par rotation ou symétrie. Les transformations ne sont pas les mêmes selon la parité de n. Mais nous n'avons pas systématiquement compté car cela devient très vite compliqué et il nous manque des outils mathématiques pour le faire. Mais si on connaît parfaitement le nombre de rotations et symétries au rang n, cela aide à déterminer les solutions du rang n+1.

axes de symétrie



échiquier pair

échiquier impair

Recherche abandonnée.

Méthode des cases contrôlées

Nous est venue l'idée de compter le nombre de case de l'échiquier $n \times n$ contrôlées par une reine placée sur chaque case, l'une après l'autre, et d'utiliser les nombres trouvés pour placer les reines.

Là, nous avons trouvé des **conjectures**, qui seraient à prouver par récurrence.

1.— Toute case située sur le tour (ou couronne extérieure de l'échiquier) contrôle $3n - 2$ cases. Par exemple sur le 3×3, c'est 7, sur le 4×4 c'est 10.

2.— Conséquence de la 1 : quand on passe de l'échiquier $n \times n$ à l'échiquier $(n+1) \times (n+1)$, il y a 3 cases de plus contrôlées par chaque case de la nouvelle couronne.

$3n-2$	$3n-2$	$3n-2$	$3n-2$
$3n-2$	$3n$	$3n$	$3n-2$
$3n-2$	$3n$	$3n$	$3n-2$
$3n-2$	$3n-2$	$3n-2$	$3n-2$

$\searrow = +2$

Nombre de cases contrôlées par une dame

3.— Au fur et à mesure que l'on passe de la couronne extérieure aux couronnes successives intérieures, le nombre de cases contrôlées par chaque case de la couronne suivante augmente de 2. Par exemple sur l'échiquier $n \times n$, on passe de $3n - 2$ à $3n - 2 + 2 = 3n$, puis à $3n + 2$ …

Cela fait, nous avons essayé d'utiliser ces conjectures pour placer des reines, un peu au hasard. On place une première reine qui contrôle p cases puis une seconde qui en contrôle q puis … jusqu'à ce que $p + q + \ldots \geq n \times n$. Sans objectif précis, cela s'est vite révélé inextricable, et en plus cela s'est avéré inexact.

Résultats trouvés

D'abord une **observation :**

Lorsqu'on ajoute une case en longueur et une case en largeur à un échiquier $n \times n$, le nombre maximum de dames à rajouter pour contrôler les nouvelles cases (à rajouter à celui de celles nécessaire pour contrôler l'échiquier $n \times n$) est 1 : placée à l'intersection des ligne et colonne rajoutées dans l'échiquier $(n + 1) \times (n + 1)$.

Ensuite une **proposition :**

Une borne supérieure de la solution est $n - 2$, à partir d'un certain rang.

Démonstration. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $m(n)$, le nombre minimum de dames nécessaires pour contrôler l'échiquier $n \times n$ vérifie $m(n) \leq n - 2$. Cela se démontre par récurrence :

C'est vrai pour $n = 3$ puisque $m(3) = 1$, résultat trivial, et $n - 2 = 1$.

Pour $n = 4$, en augmentant les cases comme dit dans la précédente observation, $m(4) \leq 2$ et $n - 3$ est remplacé par $n + 1 - 3$, soit $n - 2$. [Mais déjà, là, démontrer que $m(4) = 2$ n'est pas évident.]

Supposons $m(n) < n - 1$. Avec les observations précédentes, $m(n+1) \leq m(n) + 1$. Ce qui donne $m(n+1) < n - 1 + 1$, soit $m(n+1) < n$, ce qu'il fallait démontrer.

Voilà, pour le moment, où nous en sommes arrivés. [NDLR : les élèves joignent un programme, qui leur permet de trouver sur un « Pentium 166+, 32 Mo de RAM » en « 19 minutes et 40,441 secondes » une façon de contrôler un échiquier de 7×7 avec 4 dames placées sur les cases de coordonnées (1, 1), (2, 2), (4, 6), (6, 4). Ils terminent de façon désabusée : *le temps mis par la machine pour calculer la première solution du problème pour un échiquier* 7×7 *nous laisse à penser que l'ordinateur ne peut pas nous aider à trouver ou à justifier des résultats pour des échiquiers plus importants*. Ce qui justifie que nous ne reproduisions pas leur programme …]