pavages avec des dominos

par Farid Attaf, Natacha Delmonthe, Mohamed Nedar, Ngolen Srun, Alain Tia du Collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93)

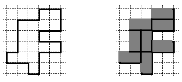
enseignants : Pierre Lévy, Mauricette Ramillon

chercheurs : Olivier Bodini, Pierre Duchet

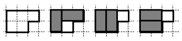
— ***pavages avec dominos, Tangram***
La question prétexte est la recherche de conditions garantissant le caractère unique de la solution trouvée à un problème de pavage particulier.

Nous avons étudié les différents pavages possibles de formes à l'aide de dominos.

Voici un exemple :



En pavant des formes avec des dominos, il apparaît clairement qu'il est impossible d'en paver certaines. Cela est évident si la forme contient un nombre impair de carreaux. Voici une forme impossible à paver :



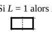
Nous avons alors commencé à étudier les rectangles de largeur 2 carreaux. A chaque fois, nous nous sommes posé la question :

" De combien de manières différentes
est-il possible de paver le rectangle
avec des dominos ? "

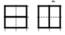
Les rectangles de largeur 2

Voici tous les pavages possibles pour les 6 premiers rectangles. (On appelle L la longueur des rectangles et N_L le nombre de pavages possibles.)

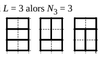
Si $L = 1$ alors $N_1 = 1$



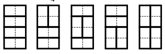
Si $L = 2$ alors $N_2 = 2$



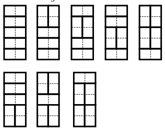
Si $L = 3$ alors $N_3 = 3$



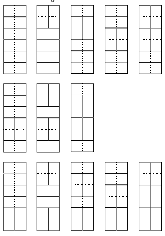
Si $L = 4$ alors $N_4 = 5$



Si $L = 5$ alors $N_5 = 8$

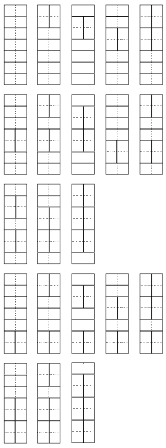


Si $L = 6$ alors $N_6 = 13$



En observant ces premiers exemples, il apparaît qu'il est possible de prévoir le nombre de pavages pour le rectangle suivant, de longueur 7. En effet, $N_3 = N_2 + N_1$ (3 = 2 + 1) ; $N_4 = N_3 + N_2$ (5 = 3 + 2) ; $N_5 = N_4 + N_3$ (8 = 5 + 3) ; $N_6 = N_5 + N_4$ (13 = 8 + 5). D'après cette remarque, on devrait avoir $N_7 = N_6 + N_5$ c'est-à-dire $N_7 = 13 + 8$ c'est-à-dire $N_7 = 21$.

Nous l'avons vérifié et voici tous les pavages possibles :



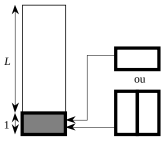
Voici donc notre conjecture :

$$N_L = N_{L-1} + N_{L-2}$$

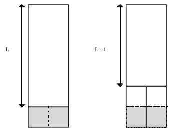
qui est valable dès que la longueur du rectangle est supérieure ou égale à 2 avec $N_0 = 0$ et $N_1 = 1$.

Voici une preuve de cette conjecture :

Prenons un rectangle de longueur L et augmentons sa longueur de 1. Pour recouvrir le morceau supplémentaire, il n'y a que 2 manières possibles, soit avec 1 domino, soit avec 2 dominos.

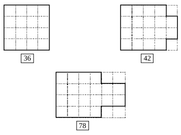


On obtient :



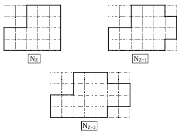
Pour paver un rectangle de longueur $L + 1$, il faut donc savoir paver un rectangle de longueur L et un rectangle de longueur $L - 1$. Notre conjecture est donc démontrée.

En utilisant cette étude, nous avons remarqué qu'il est possible de connaître le nombre de manières de paver des suites de formes utilisant ces rectangles. En voici un exemple qui obéit exactement à notre loi.



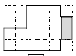
On a $36 + 42 = 78$. Et ainsi de suite.

En partant d'une forme donnée (forme Z) dont on connaît le nombre de pavages possibles par dominos N_Z (expérimentalement par exemple), nous pouvons construire une suite de formes obtenues en ajoutant un domino comme dans les exemples précédents.



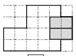
Est-il possible connaissant N_Z, c'est-à-dire le nombre de pavages de la forme Z, d'en déduire $N_Z + 1$, le nombre de pavages de la forme $Z + 1$?

C'est toujours la même idée ; il n'y a que deux manières de recouvrir le morceau supplémentaire lorsqu'on passe de Z à $Z + 1$.



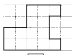
N_{Z+1}

ou



N_{Z+1}

Pour connaître $N_Z + 1$, il faut donc connaître non seulement N_Z mais aussi $N_Z - 1$ qui est le nombre de pavages de la forme suivante :



N_{Z-1}

Dans tous les cas, on aura :

$$\boldsymbol{N_{Z+1} = N_Z + N_{Z-1}}$$

Nos recherches sont, pour cette année, terminées, mais nous avons parfaitement conscience de n'avoir qu'effleuré le sujet. A l'année prochaine peut-être !