culbutos

par Younes Zahidi, Joan Claire, Collège Jean Vilar de Villetaneuse (93)

enseignant : Adrien Fryc

chercheur : François Parreau

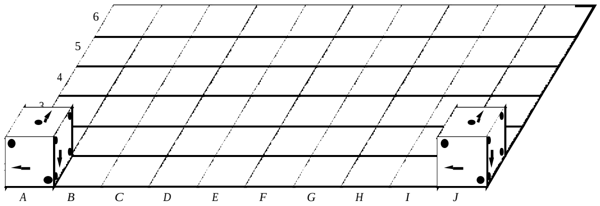
collège Jean Vilar de Villetaneuse (93), ***les culbutos***

Un cube roule sur un damier, chaque face ayant exactement la taille d'une case ; peut-on, par une suite de basculements (culbutes) faire passer le cube (le culbuto) du coin Sud-Ouest du damier au coin Sud-Est, en retrouvant au dessus la même face dans la même orientation ?

Un sujet similaire avait été traité par le collège Anne Frank de Bussy Saint Georges (77), ***culbutes triangulaires***

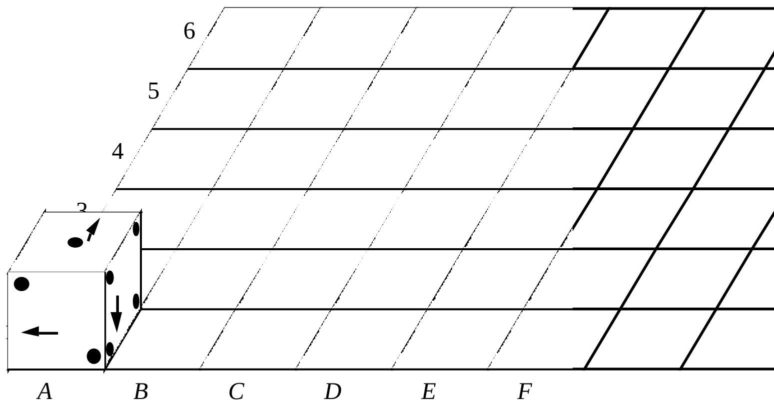
Il s'agit d'étudier les culbutes d'autres polyèdres que le cube : tétraèdre, octaèdre, icosaèdre et dodécaèdre.

[NDLC : à l'impossible, nul n'est tenu … L'article nous est parvenu bien tard, et dans un état où même Champollion n'aurait pu faire grand chose.
Exemple : « Photocomposer le doc n° 9 ». On trouvera donc dans ces pages seulement les éléments décryptés, lesquels peuvent donner un aperçu du travail effectué, mais un aperçu seulement.]



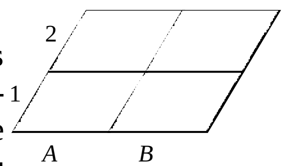
Un cube roule sur un damier, chaque face du cube ayant exactement la taille d'une case ; peut-on par une suite de basculements (culbutes) faire passer un cube (le « culbuto ») d'une position initiale au coin Sud-Ouest du damier à une position finale au coin Sud-Est, tout en retrouvant la face du dessus au dessus dans la même position ?

Matériel : un dé et un damier.



Première étape : damier 2×2 cases.

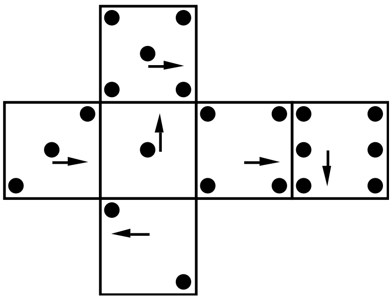
On fait tourner le dé sur le damier de 4 cases dans toutes les directions et en essayant de retrouver la face du dessus au dessus.



Dans un damier de 4 cases, il existe 2 trajets [simples] possibles partant de la case $A1$ et arrivant à la case $B1$. Le premier trajet est le plus court puisqu'on ne fait basculer le dé qu'une seule fois€. Donc il est impossible de passer par ce trajet si l'on veut obtenir la même face du dessus au dessus.

€ Le dé a 6 faces ; pour qu'une face du dessus arrive encore au dessus, elle doit au minimum basculer 3 fois[, à moins de revenir en arrière]).

Disposition du dé



5

3 1 4 6

2

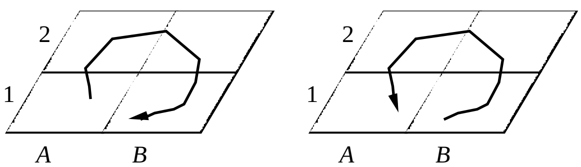
5+2=7
4+3=7
1+6=7

Exemple de basculement pour revenir sur la même face : [NDLC : le numéro indique la face du dessus]

$$\begin{array}{ccc} 2 & \rightarrow & 3 \\ \uparrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array} \qquad \text{(sur le damier } 2 \times 2\text{)}$$

1 → 3 → 6 → 4 → 1 (en ligne)

Il existe une infinité de trajets par basculements alant de la case *A*1 à la case *B*1 ; ils consistent à tourner plusieurs fois autour de ce damier de 4 cases dans un sens ou dans l'autre :



Première question sur le damier 2×2 cases :

Peut-on par une suite de basculements faire passer un dé d'une position initiale à la case *A*1 du damier à une position finale à la case *B*1, tout en retrouvant la face du dessus au dessus ?

OUI ! … Le premier trajet [donné plus haut en exemple] permet d'arriver à la case *B*1 tout en retrouvant la case du dessus au dessus. (Mais pas dans la même orientation).

Deuxième question sur le damier 2×2 cases :

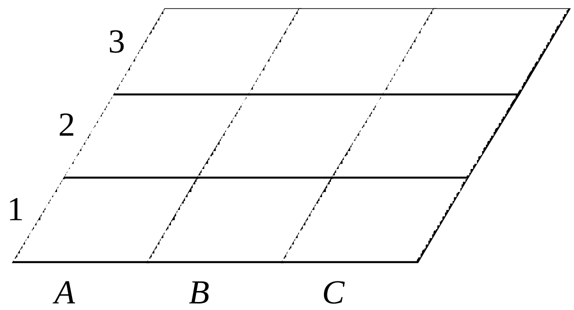
Peut-on arriver à la case *B*1 tout en retrouvant la face du dessus au dessus dans la même orientation ?

NON ! … Nous ne sommes pas arrivés à la case *B*1 tout en retrouvant la face du dessus au dessus et dans la même orientation pour une raison que l'on ne connaît pas …

Première hypothèse :
le damier est trop petit,

Deuxième hypothèse :
le damier a un nombre pair de cases.

Deuxième étape : damier 3×3 cases (9 cases)



Dans ce damier de 9 cases, on a trouvé 3 possibilités d'arriver à la case *C*1 avec la même face au dessus [et parmi elles] deux possibilités pour avoir la même direction du départ au dessus. (On a fait basculer le dé sans passer deux fois sur la même case). Pour les deux possibilités d'avoir la même face du dessus au dessus avec la même orientation, on bascule le dé 6 fois (nombre pair, de la forme 2 *n*).

Schéma du basculement pour obtenir la solution du 9 cases :

$$\begin{array}{ccccc} 6 & \rightarrow & 3 & & \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ 2 & & 2 & & \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ 1 & & 4 & \rightarrow & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 4 & \rightarrow & 6 \\ & & \uparrow & & \downarrow \\ & & 2 & & 2 \\ & & \uparrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & 3 & & 1 \end{array}$$

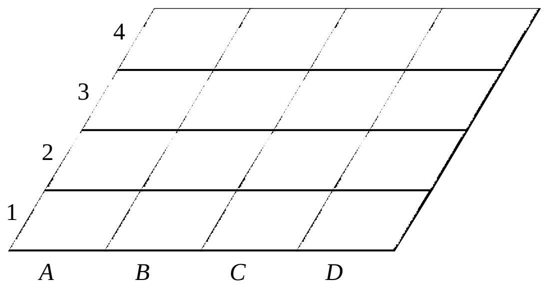
On remarque que les mêmes chiffres reviennent dans les 2 solutions du 3 × 3 cases.

1ère solution	2ème solution	3ème solution
1	1	1
2	3	2
6	2	3
3	4	5
2	6	1
4	2	
1	1	

Mise des solutions sur une même grille:

6 → 3**4** → **6**
↑ ↓**↑** **↓**
2 **2**→32**2** → 5**2**
↑↑ ↓**↑** ↓**↓**
1**11** → 4**3** →11**1**

Troisième étape : damier 4×4 cases (16 cases)



Sur le damier 4 × 4 cases, nous avons trouvé de nombreuses possibilités pour partir de la case $A1$ et d'arriver à la case $D1$ tout en retrouvant la face du dessus (face 1) au dessus. Mais aucune possibilité pour qu'elle arrive avec la face 1 direction vers le haut.

Tiens?! Ce damier a les mêmes caractérisitiques que le 2 × 2 cases. (Ils arrivent tous les deux avec la même face du dessus au dessus et jamais avec l'orientation du départ).

Nous proposons donc la conjecture suivante :

Conjecture (Damier à nombre pair de cases)

Sur un damier à nombre pair de cases (**2 n**), il est impossible de partir de la case Sud-Ouest ***et d'arriver à la case*** Sud-Est ***avec la face du dessus au dessus et dans la même orientation.***

Théorème : Pour partir d'une case quelconque, et arriver sur la même face au-dessus (mais pas nécessairement avec la même orientation) qu'au départ, il faut faire un nombre pair de basculements.

Démonstration.

Dans un damier 2 × 2 cases, basculement 6 fois du dé en tournant : 1 ↑ ⇒ 1 ↓

alors basculement 12 fois du dé en tournant : 1 ↑ ⇒ 1 ↓ ⇒ 1 ↑

Dans un damier 4 cases, il faut basculer 4 fois + 2 basculements = 6 basculements, ce qui donne, en tournant sur 4 cases :

3 basculements :

1↑ ⇒ 1←

6 basculements :

1↑ ⇒ 1← ⇒ 1↓

9 basculements :

1↑ ⇒ 1← ⇒ 1↓ ⇒ 1→

12 basculements :

1↑ ⇒ 1← ⇒ 1↓ ⇒ 1→ ⇒ 1↑

Le dé alterne de sens à chaque fois qu'il arrive sur une même face entre les flèches horizontales (← et →) et les flèches verticales (↑ et ↓). Le minimum de basculements sur un 4 cases pour avoir la même face est 3 basculements. Ce qui donne :
• si on part d'une direction ↑ + 3 basculements, on arrive à une direction ←
• si on part d'une direction ↑ + 6 basculements, on arrive à une direction ↓.

Déduisons :

• si on fait un nombre impair de basculements, on arrive à une direction différente.

• si on fait un nombre pair de basculements, on arrive à une même direction.

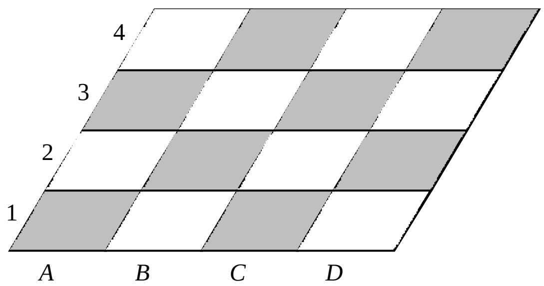
Donc pour arriver sur la même direction qu'au départ, il faudra faire un nombre pair de basculements. [NDLR. La preuve esquissée ci-dessus ne concerne qu'un certain type de parcours. Elle est donc incomplète.]

Exemple. Voici les endroits où l'on pourra avoir la même face du dessus au dessus dans la même orientation pour les grilles 3×3 et 4×4. Nous allons appeler les orientations des flèches : H pour la direction horizontale et V pour la direction verticale.

V	H	V
H	V	H
V	H	V

H	V	H	V
V	H	V	H
H	V	H	V
V	H	V	H

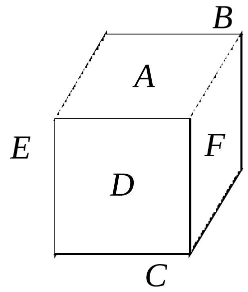
Si nous commençons sur une case noire avec une orientation verticale, alors toutes les autres cases noires auront une orientation verticale et pourraient avoir la même face du dessus au dessus.



[NDLR. Compte-tenu de la disposition *très particulière* des flèches sur le dé (bien observer le dé, pages 161 et 162) l'alternance observée ici des directions H et V est indépendante des faces considérées ! On a ainsi une preuve, cette fois-ci complète, du théorème de la page 163. Les arcanes de la disposition des flèches sont partiellement dévoilées dans la suite.]

L'étape des orientations est terminée et nous allons passer plus sérieusement sur celle des chiffres. Nous allons essayer d'avoir le chiffre que nous voulons dans la case que nous voulons.

Table de basculements.



F vue de droite
D vue de face
A vue de dessus
B vue arrière
C vue de dessous
E vue de gauche

$A\uparrow$ vers D	$A\uparrow$ vers B	$A\uparrow$ vers F	$A\uparrow$ vers E
$1\uparrow\Rightarrow 5\rightarrow$	$1\uparrow\Rightarrow 2\leftarrow$	$1\uparrow\Rightarrow 3\rightarrow$	$1\uparrow\Rightarrow 4\rightarrow$
$2\uparrow\Rightarrow 3\rightarrow$	$2\uparrow\Rightarrow 4\leftarrow$	$2\uparrow\Rightarrow 6\rightarrow$	$2\uparrow\Rightarrow 1\rightarrow$
$3\uparrow\Rightarrow 1\leftarrow$	$3\uparrow\Rightarrow 6\rightarrow$	$3\uparrow\Rightarrow 5\leftarrow$	$3\uparrow\Rightarrow 2\leftarrow$
$4\uparrow\Rightarrow 6\rightarrow$	$4\uparrow\Rightarrow 1\leftarrow$	$4\uparrow\Rightarrow 5\rightarrow$	$4\uparrow\Rightarrow 2\rightarrow$
$5\uparrow\Rightarrow 4\leftarrow$	$5\uparrow\Rightarrow 3\rightarrow$	$5\uparrow\Rightarrow 6\leftarrow$	$5\uparrow\Rightarrow 1\leftarrow$
$6\uparrow\Rightarrow 2\leftarrow$	$6\uparrow\Rightarrow 5\rightarrow$	$6\uparrow\Rightarrow 3\leftarrow$	$6\uparrow\Rightarrow 4\leftarrow$

Pour la suite des tables, voici quelques indications :

Quand on obtient une orientation horizontale au dessus $\leftarrow$ ou $\rightarrow$, faire pivoter la flèche du nombre de quart qu'elle compte en partant d'une position $\uparrow$.

Exemple : $1\uparrow \Rightarrow 5\rightarrow$ (colonne $A\uparrow$ vers D) ; et si on a $1\rightarrow$, au lieu de $1\uparrow$?

Si on a $1\rightarrow$, la position du dé va changer, il faudra regarder une autre colonne. La flèche va vers la vue de droite, F : il faudra regarder la colonne $A\uparrow \Rightarrow F$. Mais l'orientation $\uparrow$ va changer et devenir $\rightarrow$; alors dans $1\uparrow\Rightarrow 3\rightarrow$, $\rightarrow$ va devenir $\downarrow$ [, au lecteur de s'en convaincre !] donc $1\rightarrow\Rightarrow 3\downarrow$.

$3\downarrow$ sera le chiffre qui viendra dans le basculement de $1\rightarrow$ dans la colonne $A\rightarrow$ vers D. Cela devrait vous aider pour faire la suite des tables, avec les colonnes $A\rightarrow$ vers D, $A\rightarrow$ vers B, $A\rightarrow$ vers F, $A\rightarrow$ vers E, $A\downarrow$ vers D, …

Le manque de temps ne nous a pas permis de poursuivre plus avant notre recherche sur les grilles de chiffres et les culbutes possibles et de répondre à la question posée avant le Congrès 1997 de MeJ. Néanmoins, le sujet étant passionnant, nous poursuivons activement nos recherches.