

le loto sportif

par Arnaud de Labriolle et Jérémie Robert,
élèves de Tle S au Lycée Montaigne de
Bordeaux (33)

enseignant : Pierre Grihon

chercheur : Laurent Habsieger

— *le loto sportif*

Nombre minimal de grilles à jouer pour avoir ...

0 erreur ?

au plus une erreur ?

au plus deux erreurs ?

Une grille de loto sportif se compose de 13 lignes et de 3 colonnes.

On coche une case dans chaque ligne, et on compare avec une grille de référence correspondant aux résultats de 13 rencontres.

On peut gagner avec 0 erreur, au plus une erreur, au plus 2 erreurs avec évidemment des gains décroissants ...

On cherche le nombre N minimal de grilles à remplir pour gagner à coup sûr dans chacun de ces cas.

Avec 0 erreur.

Il suffit (!!) de remplir toutes les grilles possibles soit 3^{13} .

Est-ce bien raisonnable ?

Avec 1 erreur.

Supposons choisie la grille de référence.

Le nombre de grilles avec une erreur exactement est de 26 : il y a 13 lignes où l'erreur peut se trouver et dans chaque ligne 2 cases possibles.

Avec la grille exacte, il y a donc 27 grilles ayant au plus une erreur.

Si les 3^{13} grilles possibles étaient rangées en groupes à l'intérieur desquels le nombre de cases différentes est au plus de 1, il y aurait au moins $3^{13}/27$ groupes, car ces groupes peuvent avoir des grilles communes. Le nombre de groupes disjoints est donc au minimum de $3^{10} = 59\,049$.

En jouant une grille de chacun de ces groupes, on couvrirait toutes les possibilités.

Le nombre N est donc ici supérieur ou égal à 59 049.

Avec 2 erreurs.

- Il y a déjà 27 grilles ayant au plus une erreur par rapport à la grille de référence.
- Cherchons maintenant le nombre de grilles ayant exactement 2 erreurs.

Il y a 13 choix pour la ligne de la première erreur, puis 12 choix pour la deuxième, soit 13×12 choix mais il n'y a pas de raison de privilégier une erreur (la première) donc en fait il y en a $13 \times 12 / 2$ soit 78.

Dans chaque ligne, il y a 2 choix de cases donc finalement, nous avons 78×4 grilles ayant exactement 2 erreurs et donc :

$$78 \times 4 + 27$$

soit 339 grilles ayant au plus 2 erreurs.

Si nous généralisons à une grille à n lignes et toujours 3 colonnes, cela donne $2n^2 + 1$.

Avec le même raisonnement que pour le cas d'au plus une erreur, on voit donc que le nombre N est supérieur à $3^{13} / 339$ soit 4 703.

Nous avons voulu ensuite chercher un majorant de N à l'aide d'un ordinateur.

Nous codons les grilles de la manière suivante : A pour une case cochée dans la première colonne, B dans la deuxième, C dans la troisième. Par exemple : $AABCBBABBBACAAC$.

L'ordinateur choisit une grille au hasard et élimine de la liste les grilles présentant au plus 2 erreurs avec cette grille. Il choisit ensuite une grille au hasard parmi les grilles restantes et élimine de la liste de celles-ci toutes les grilles présentant au plus 2 erreurs avec la grille choisie. Et ainsi de suite jusqu'à épuisement de toutes les grilles.

Dans le cas de 7 lignes, nous avons trouvé 73 grilles pour recouvrir toutes les possibilités, c'est-à-dire qu'en jouant ces 73 grilles, toute grille (et donc en particulier la grille de référence) a au plus deux erreurs par rapport à l'une de ces 73 grilles.

Celles-ci ayant été trouvées au hasard, on peut supposer qu'il y a un système de N grilles remplissant les mêmes conditions avec $N \leq 73$.

Ainsi, pour 7 lignes, on peut affirmer que $3^7 / (2 \times 7^2 + 1) \leq N \leq 73$ soit $21 \leq N \leq 73$.