1 Paris et New York sont-ils les coins d'un carré ?

situation-recherche, 14 à 24 séances.

Objectifs

Faire découvrir les finalités de la géométrie (en particulier son rôle de modèle du monde réel) et les principes de son fonctionnement (en particulier le rôle des définitions et des preuves). La recherche peut (re)donner aux élèves le goût de l'étude géométrique.

On pourrait penser qu'une réflexion non-euclidienne puisse semer le trouble dans des esprits encore peu férus de géométrie et qu'une telle étude ne doive pas être abordée avant que les principes de la géométrie plane soient bien intégrés. L'expérience prouve au contraire, qu'en collège comme au lycée, on peut utiliser une situation-recherche de ce type pour une mise en place solide de la géométrie euclidienne et des notions des programmes scolaires.

Prérequis
Point, cercle, sphère, droite, segment, longueur d'un segment, carré.

Concepts en jeu
Espace géométrique et concepts sous-jacents (figure, paralléle, perpendiculaire, nombre réel, mesure (distance, longueurs, aires & sphère, cercle), transformations, dimension (repères…), axiomes). Fonctions (& courbe, surface, continuité, limite…)

Notions problématiques
Carré, angle droit, médiatrice, cercle, inégalité triangulaire, longueur d'un arc de cercle, distance, aires sphériques, π, géodésique, méridiens et parallèles.

Aides possibles
• Quels phénomènes sont liés à la rotondité de la Terre et comment s'en apercevoir ? (noter par exemple, la différence horaire des levers de soleil sur le même méridien entre le nord et le sud de la France).
• Le plus court chemin sur une surface est-il toujours plan ? Exemple du cube, de la sphère . Quelles surfaces ont des géodésiques planes ? Explorer d'autres espaces "courbes" ou "bizarres" (Cylindre, cône, Ruban de Möbius, Tore, selle de cheval, etc.)
• Sur une sphère les triangles sont déterminés par leurs angles ! Sur une sphère de rayon r, l'aire d'un triangle sphérique dont les angles valent a, b et c est $S=(a+b+c-\pi)r^2$, une formule dûe à Girard, généralisée par Gauss.
• Que devient le théorème de Pythagore sur la sphère ; quelle est l'aire d'un carré sphérique ?
• Constructions sur la sphère : milieu, bissectrice, médiatrice … ; hauteurs d'un triangle (concourantes ?)

?-!

3 Géométrie par les formules.
4 Plus court chemin hétérogène.
5 Cartographie.
6 Le problème du Jardinier.

- Géographie, économie (cartographie, lignes maritimes et aériennes)
- Histoire (le Nouveau Monde, grande découvertes, instruments de navigation…)
- Philosophie (rotondité de la Terre, Copernic, Galilée, concept de modèle…)
- Technologie : conception et réalisation en atelier de boules et de balles, d'instruments de dessins ou de repérage sur les sphères.

& *CARRÉ, SPHERE, INVERSION, GÉOMÉTRIE, HILBERT*

axiome, conjecture, courbe, espace, longueur, loxodromie.

Compas, équerre et rapporteur (transparent). Un cordeau peut servir de règle. Mappemonde gonfable du commerce.

[1] D. Gaud, J. Guichard, J.-P. Sicre, J. Souville, *Sur les géométries non euclidiennes, Documents pour travaux interdisciplinaires philo-math.*, Brochure IREM de Poitiers, Juin 1995. (IREM Poitiers : 40 av. du Recteur Pineau, 86022 POITIERS CEDEX, tél. 0549453877).
[2] J-P. Petit, *Le géométricon* , Belin, Paris, 1991.
[3] J-P. Petit, *Le trou noir* , Belin, Paris, 1981. +

Courbure des surfaces riemaniennes (formule de Gauss-Bonnet).

Déroulement
La recherche peut avancer dans deux directions distinctes et complémentaires. Soit la géométrie euclidienne est un outil d'investigation de la sphère (point de vue extrinsèque), soit ce sont les principes mêmes de la géométrie euclidienne qui viennent en discussion et on essaye alors de construire une autre géométrie en cherchant de nouveaux principes applicables à la sphère (point de vue intrinsèque). L'intéraction entre les deux point de vue est forte et chacun conduit à un réel questionnement sur la démarche scientique et sur la nature du travail mathématique : les concepts les plus "élémentaires" viennent nécessairement en discussion. Le fait qu'un élève s'écrie «mais alors qu'est-ce que c'est qu'une droite ? Je ne comprends plus rien du tout !» loin de constituer un échec, atteste au contraire qu'une question essentielle a été comprise et que le processus de prise de connaissance est en bonne voie.

* Sur l'accompagnement de la recherche et le désir de preuve, voir les commentaires du document ***Carré.***

Remarque — La géométrie non-euclidienne de la sphère est peu utilisée telle quelle (elle porte le nom barbare de "géométrie doublement elliptique"). On préfère la géométrie ("simplement") elliptique où les points antipodaux sont identifiés deux à deux (espace appelé "plan projectif").

Modèle de Klein de la géométrie sphérique. On peut mettre la sphère à plat (projection stéréographique: voir ***Inversion***). Le procédé permet de faire de la géométrie sphérique dans le plan, les géodésiques devenant des cercles ! On peut étudier alors de manière systématique les constructions des "segments" (arcs de cercle), des "perpendiculaires" (cercles orthogonaux), des "cercles" (qui sont encore des cercles !!), etc. : l'utilisation de macro-constructions correspondant aux nouvelles constructions de base permet alors d'expérimenter la géométrie sphérique.

Modèle de Poincaré (géométrie elliptique)
Un demi-plan bordé par une droite "horizon" de référence, dans lequel les "droites" sont les demi-cercles centrés sur l'horizon ainsi que les *demi-droites* perpendiculaires à l'horizon et dont l'origine est sur lui.