2 A Points à relier

situations-recherche (≥ 8 séances)
situations-problème (5 à 8 séances)
travaux ou études dirigés.
exercices (Lycée)

Objectifs

Identification d'informations pertinentes, géométriques ou combinatoires, permettant d'entrer dans une problématique d'optimisation et de preuve. Mise en oeuvre de cadres et de procédures indépendantes.

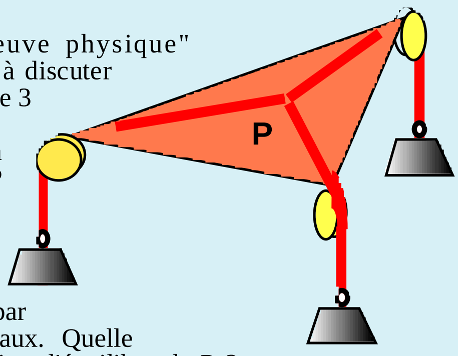
Mise en oeuvre de techniques fondamentales : preuve, usage de transformations géométriques, inégalités, utilisation de nombres complexes, extremum d'une fonction.

Prérequis
longueur d'un segment.

Concepts actifs
longueur, angle, graphe (réseau), fonction, extremum, combinaison logique de cas.

Savoirs-problèmes
conception d'une preuve géométrique, définition d'une fonction, tranformations géométriques, minimum (local vs global), inégalité triangulaire, cosinus, angles sous tendant un arc de cercle, arbre.

Outils
• Une "preuve physique" intéressante à discuter pour le cas de 3 points:
3 fils liés en un point P passent par les sommets A, B, C du triangle et sont tendus par des poids égaux. Quelle sera la position d'équilibre de P ?



(il s'agit d'une expérience idéale, seule capable de produire une certitude mathématiquement acceptable : les frottements sont nuls, et les fils, de poids nul, sont inextensibles). D'une part, l'énergie potentielle doit être minimale : la somme des hauteurs des poids est donc minimale. Autrement dit, la somme des longueurs des parties verticales des fils sera maximale, donc la somme PA+PB+PC, sera minimale. D'autre part, l'équilibre du point P indique que la résultante des forces de traction est nulle. Les trois forces, d'amplitude égale, sont disposées en étoile régulière autour de P avec des angles égaux à 120°. Synthèse : lorsque la position d'équilibre est à l'intérieur du triangle, la somme PA+PB+PC est donc minimum en un point (*point de Toricelli* du triangle) d'où l'on voit chacun des cotés suivant un angle de 120° (*point de Fermat* du triangle).
• Le cas de 4 points de l'espace est très stimulant à discuter. La dispositions des liaisons de l'atome de carbone est-elle la meilleure ?
• Utilisation systématique pour n points de certains des éléments caractéristique de la solution pour 3 points. Aux points de jonctions les angles sont de 120°, …
• Lavariante "de l'arbre minimum", proposée au élèves est classique en théorie des graphes ; la géométrien'y joue plus de rôle.

& ***Puits, Distance***

arbre, distance, longueur, optimal

Montage physique possible pour 3 points. L'utilisation d'une planche à clous plogée dans un bain savonneux est envisageable.

[1] Yvonne et René Sortais, *La Géométrie du Triangle*, Hermann, Paris, 1987.
[2] Martin Gardner, *Où l'on découvrira comment tendre un filet sur un échiquier et faire des mathématiques en forêt*, Pour la Science n°108, octobre 1986, 107-111.

Théorie des graphes.
Plus court chemin.
Algorithmes polynomiaux.

Déroulement
A la différence du sujet 2 (très similaire pour des points qui sont les sommets d'un polygône ou d'un polyèdre convexe) le réseau cherché ici est *connexe*.
Quelle est la fonction dont on recherche le minimum ?
La mise en place d'une paramétrisation est une étape très intéressante du travail : elle permet de donner du sens au concept de fonction. (voir l'exemple de ***Puits***).
Quelle que soit la piste choisie, arbre minimum, 3,4 ou n points, il nous semble intéressant de chercher systématiquement à généraliser les arguments fournis. Il serait dommage en particulier de passer à coté de la structure d'arbre.
La focalisation sur un aspect particulier du problème permet de l'utiliser sur une durée plus courte (4 à 6 séances) ou de traiter séparement certains aspects en travaux dirigés.
Le cas des triangles avec un angle supérieur ou égal à 120° propose un changement de registre intéressant dans la démarche de preuve.

L'existence d'une solution optimale n'est nullement évidente, même pour 3 points. On peut la faire admettre (comme conséquence d'un théorème de compacité de l'espace des réalisations acceptables) ou bien, la figure solution étant construite, demander une preuve des inégalités nécessaires (ce qui établit aussi l'unicité lorsque c'est le cas).

2 Un cube fantôme.
2B Rencontre à moindre coût

• Physique (équilibre de forces, statique)

Recherche du réseau optimum.
On peut l'expérimenter en direct. Un outil intéressant à construire permet le report sur un axe de la somme de longueurs, afin de tester l'évolution de cette somme lorsqu'on modifie la position des points du réseau considéré. L'outil dépend de la structure du réseau envisagé et le va-et-vient entre l'utilisation de Cabri et le travail de conception et de formulation de conjectures évite l'enlisement.

Point de Toricelli, point de Fermat d'un triangle
Cabri est un des moyens de deviner les positions optimum et favorise la découverte de preuves.