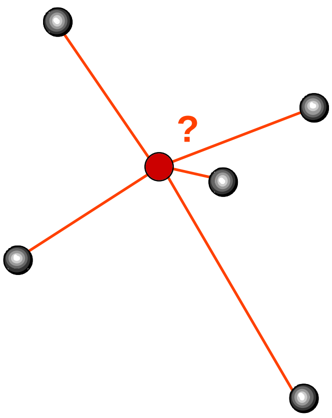
2 B

Rencontre à coût minimum

Les membres d'une association habitent des lieux éloignés et désirent se rencontrer. Où choisir le lieu de rencontre pour que les frais, qui sont à la charge de l'association, soient réduits au minimum ?

Plusieurs points étant donnés, trouver un lieu qui soit "le plus proche possible" de tous ces points.

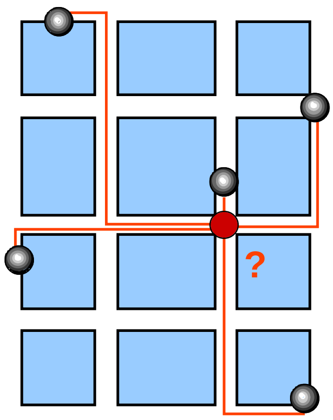
La résolution d'un tel problème dépend évidemment des moyens de communications envisagés et des trajets possibles. Il s'agit aussi de donner un sens précis à l'expression"le plus proche possible".



Envisageons le cas simple où aucune restriction n'existe sur les parcours et où les prix des voyages sont proportionnels à leur longueur. Les points de départ des voyageurs, sont des points A,B,C,… du plan. Un lieu de rencontre optimal sera un point P tel que la somme des longueurs des segments PA, PB, PC, … soit la plus petite possible. Il revient au même de vouloir que la distance moyenne de P aux points de base soit minimum. Malgré sa simplicité, personne ne connaît de réponse générale à ce problème. Alors ? On cherche ?

☞ Y a-t-il une ou plusieurs solutions ? Peut-on les construire simplement, au moins pour un petit nombre de points dans le plan ou dans l'espace ?

☞ Comment être sûr qu'un point est une position optimale ? En comparant avec une position quelconque ? Éloigner le point P d'une position optimale, même de très peu, doit faire augmenter la somme PA +PB+PC+… Cette idée de "bouger la position" peut peut-être vous aider.



Bien des variantes de ce problème sont également intéressantes à étudier. En voici deux :

☞ A Manhattan, quartier Est de New York, les rues sont à angle droit. Les parcours possibles à pied sont alors des lignes "en escalier". Les longueurs sont plus simples à exprimer que dans le plan géométrique ; les New Yorkais évaluent d'ailleurs couramment les distances en nombre de "blocs". De plus, à la différence du plan, le nombre de positions à envisager est fini. Peut-on résoudre notre problème dans ce cas ? Ou plus généralement dans le cas d'une ville quelconque ?

☞ On peut vouloir trouver un lieu qui soit accessible par tous en un minimum de temps, le prix n'ayant pas d'importance. Un emplacement optimal sera un point P tel que la plus grande des distances PA, PB, PC, …soit la plus petite possible.

Où installer un centre de distribution de manière à minimiser les frais de livraison ? Où installer une caserne de pompiers pour intervenir n'importe où en temps minimum ? Où installer un central téléphonique ? Les mathématiques utilisées pour tenter de répondre à ces questions dépendent beaucoup des contraintes réelles portant sur les trajets et l'estimation des coûts ; ce n'est pas toujours la somme des distances qui doit être prise en compte.

On rencontre des problèmes analogues lorsqu'on étudie les positions d'équilibre d'un objet soumis à plusieurs forces. Ainsi une bille d'acier repoussée par des aimants pourra-t-elle rester immobile pourvu que l'énergie qui correspond à sa position soit plus basse que celle de toute autre position voisine.

“MATh.en.JEANS” en 1997