2 B Rencontre à coût minimum

situations-recherche (≥ 10 séances)
situations-problème (Lycée, ≥6 séances)
travaux ou études dirigés (≥ 5 séances)
exercices (Lycée)

Objectifs

Mise en rapport de cadres différents (géométrique, combinatoire, numérique, analytique, algébrique) dans une problématique d'optimisation et dans une démarche de preuve.

Mise en oeuvre de techniques fondamentales : inégalités, utilisation de nombres complexes, extrémum d'une fonction, ((différentiation)).

Distance , *Puits* , ***exercices 1 et 2***

distance, longueur, optimal

Montage physique possible.

[1] Yvonne et René Sortais, *La Géométrie du Triangle*, Hermann, Paris, 1987.
[2] Ian Stewart, Le laçage de chaussure, Pour la Science.
[3] R. Férréol, F. Casiro, Olympiades de mathématiques, concours général, Vol. 5 (1991-1993), Éd. du Choix, Argenteuil, 1994.

Exemples en Recherche Opérationnelle : problématique d'installation d'un centre de ressources.

Prérequis
longueur d'un segment.

Concepts actifs
distance, angle, , configuration géométrique, fonction, extrémum, dérivation.

Savoirs-problèmes
moyenne, conception d'une preuve géométrique ou analytique, minimum d'une fonction, inégalité triangulaire, cosinus, angles sous tendant un arc de cercle, vecteurs, transformations géométriques.

Outils

• Des dispositions particulières des points de base peuvent faire l'objet d'une étude complète: points alignés, sommets d'un polygone ou d'un polyèdre régulier, cas de 3 points, 4 points (plus simple !) …

• Rôle des symétries.

• Le modèle physique, décrit pour 3 points dans la fiche 2A, se généralise en offrant une piste de recherche intéressante et une reformulation inattendue.

• La recherche du minimum d'une fonction joue un rôle central (voir l'exemple de ***Puits***) et peut donner lieu à l'introduction du concept de dérivée, ici pertinent.

• Les nombres complexes peuvent simplifier certaines formulations mais semblent d'un usage limité.

• Une notation fonctionnelle S(P)=PA+PB+PC+… est utile.

Variantes

• Si on se restreint à des déplacements dans un réseau de communication fini, un arbre par exemple, ou une ville "à la Manhattan", le problème devient très combinatoire. Une telle variante semble particulièrement intéressante en collège

• Si les coûts sont proportionnels aux carrés des distances, le problème devient un exercice élémentaire de géométrie barycentrique, résolu par la formule de Leibniz.

Déroulement

Un discussion sur la modélisation du problème aide à motiver les élèves. Le fait que le problème soit d'énoncé simple et ouvert donne une grande liberté d'exploration. Sauf limitation précoce à un cas particulier, une étude fructueuse de ce sujet demande du temps.

Si on souhaite profiter au maximum de la richesse des interactions possibles entre les groupes d'élèves et les différents cadres d'étude, il est indispensable de disposer d'une longue durée afin de faire vivre à la fois
- l'étude de cas particuliers, qui favorisent les discussions argumentatives et mettent en oeuvre des techniques,
- l'exploration de pistes qui introduisent ou mettent en place des techniques de large portée,
- la problématique générale, qui suscite la réflexion théorique.

On peut envisager une étude plus rapide en deux temps : une première phase (3 ou 4 séances) permet d'identifier une large panoplie de pistes possibles et de sous-problèmes ou de variantes. Une discussion confrontant ces pistes aux outils a priori disponibles (géométrie élémentaire, expérimentation graphique, vecteurs, nombres complexes, dérivées etc…) permet alors de recentrer l'activité dans une direction précise (source de travaux ou d'études dirigés).

L'existence d'une solution optimale résulte de la continuité de la fonction étudiée et de la compacité locale du plan. Des preuves directes (établissant aussi l'unicité, le cas échéant) supposent la recherche patiente d'inégalités en jouent sur les trois cadres algébrique, géométrique et analytique. L'étude de l'effet de petites variations, bien que très féconde, est rarement envisagée par les élèves. L'idée de compensation liée à la notion de moyenne s'avère, elle aussi, utile.
La variante suggérée du rendez-vous à Manhattan est plus facile à gérer car les élèves ont des moyens simples de valider ou d'infirmer leur conjectures, mais la géométrie euclidienne y est absente !

2 Un cube fantôme.
2A Points à relier

• Physique (équilibre de forces, statique)

Recherche des optima.
On peut expérimenter en direct. Le report sur un axe de la somme des distances permet d'en tester la variation. L'émergence de procédures conjecturales semble toutefois limitée au cas de 3 points. (voir 2A). Le recours à un logiciel graphique de calcul formel (Mapple®, Mathematica®) est à considérer.