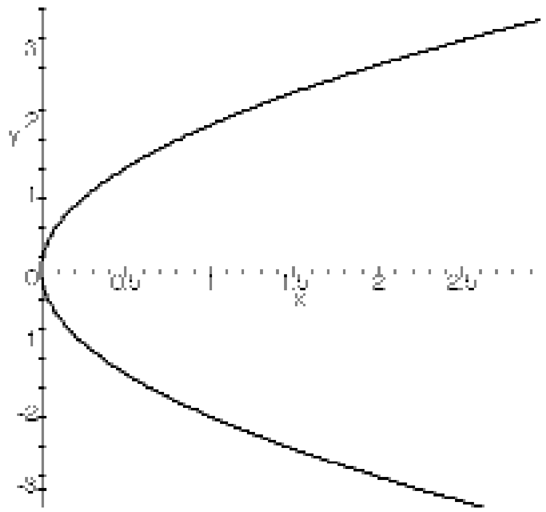
# intersections de courbes

par Albert Andinaïk (1° S), Aline Bouyaud (1° S), Hortense Disdero (1° S) du Lycée Pablo Picasso de Fontenay-sous-Bois (94) et Mohammed ??? du lycée Romain Rolland d'Ivry-sur-Seine (94)

enseignantes : Monique Corlay, Christiane Guedj, Claude Parreau

Traduction du texte en latin : D. Chandesris

Chercheur : Olivier Piltant



lycées d'Ivry (94) & Fontenay sous Bois (94) — ***intersections de courbes***

Par un point du plan passe une infinité de droites, par deux points distincts en passe une seule et par trois points distincts ou plus n'en passe aucune … sauf si ces points sont tous sur la droite qui joint deux d'entre eux. On se pose un problème analogue pour des courbes un peu plus sophistiquées que des droites. Comme le dit Jacobi : « … duabus curvis tertii ordinis se in 9 punctis intersecantibus, … »

***Combien de points faut-il pour déterminer une courbe ?***

Nous savons que dans un plan, par un point passent une infinité de droites, par deux points une seule, et par trois points ou plus en général aucune. Le but de notre atelier est de répondre à la question suivante :

« Combien de points faut-il
pour déterminer une courbe ? »

Pour cela nous étudions d'abord les coniques (ex : $x^2 + xy + 3y^2 - 2x + 4 = 0$) en nous posant différentes questions. « Existe-t-il une conique ou plus qui passe par 1, 2, 3 ou plus points donnés du plan ? Est-ce que cela dépend de la position de ces points les uns par rapport aux autres ? »

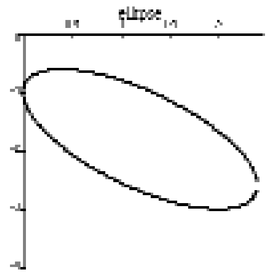
Ensuite nous étudions le cas des cubiques (ex : $x^3+x^2y+y^3-4xy^2+2x^2+3y^2-y+15=0$). Pour ces derniers cas, nous nous basons sur un texte en latin de Jacobi "De relationibus...". Nous tenterons de démontrer et préciser ses résultats dans le cas des courbes de degré 3.

***Les différentes sortes de coniques***

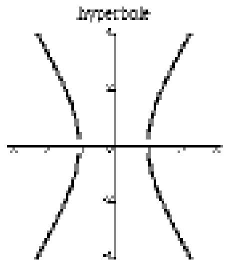
Il y a exactement 4 types de coniques. Les équations correspondent aux polynômes à deux variables $x$ et $y$ de degré 2.

ellipse : $6x^2 + 6y^2 + 8xy + 12y + 6 = 0$,
hyperbole : $4x^2 - y^2 - 4 = 0$,
parabole : $x^2 - 3y = 0$,
Conique dégénérée :
$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 11x + 8y - 6 = 0$$
soit $(2x + y - 1)(x - 2y + 6) = 0$.

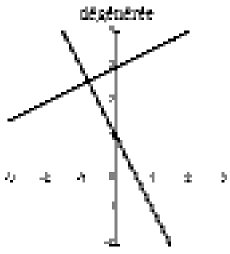
ellipse

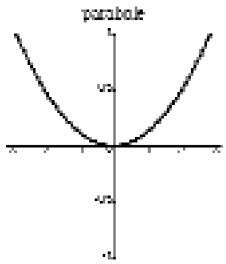



hyperbole



dégénérée parabole





***Combien de coniques ?***

*A, B, C, D, E* étant 5 points du plan, on les repère par leurs coordonnées dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$, *A*, *B*, *C* étant supposé non alignés. On pose $D(\alpha,\beta)$, $E(\alpha', \beta')$. Les coniques sont recherchées par leurs équations dans ce repère :

$$a x^2 + b y^2 + c xy + d x + e y + f = 0.$$

En écrivant qu'elles passent par un point donné on obtient une équation :

pour *A* :
$$f = 0$$

pour *B* :
$$a + d + f = 0$$

pour *C* :
$$b + e + f = 0$$

pour *D* :
$$a\,\alpha^2 + b\,\beta^2 + c\,\alpha\beta + d\,\alpha + e\,\beta + f = 0$$

pour *E* :
$$a\,\alpha'^2 + b\,\beta'^2 + c\,\alpha'\beta' + d\,\alpha' + e\,\beta' + f = 0.$$

On a donc à résoudre un système linéaire homogène de 3, 4, ou 5 équations. Les résultats figurent dans le tableau suivant.

| ***nombre de points*** | ***nombre de coniques*** | ***coefficients de l' équation*** |
|---|---|---|
| 3 points *A*, *B*, *C* non alignés | infinité de coniques | $f = 0$, $d = -a$, $e = -b$ |
| 3 points alignés | infinité de coniques dégénérées (2 droites) | |
| 4 points *A*, *B*, *C*, *D*<br>3 points quelconques étant non alignés | infinité de coniques | $f = 0$, $d = -a$, $e = -b$, $c = \dfrac{a\alpha(1-\alpha) + b\beta(1-\beta)}{\alpha\beta}$ |
| 4 points dont 3 alignés ou<br>5 points dont 4 alignés | infinité de coniques dégénérées (2 droites) | |
| 5 points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*<br>3 points quelconques étant non alignés | une seule conique | $f = 0$, $d = -a$, $e = -b$, $c = \dfrac{a\alpha(1-\alpha) + b\beta(1-\beta)}{\alpha\beta}$, $a = \dfrac{-b\beta'\beta\big(\alpha'(1-\beta)-\alpha(1-\beta')\big)}{\alpha'\alpha\big(\beta'(1-\alpha)-\beta(1-\alpha')\big)}$ |
| 5 points dont 3 alignés<br>4 points quelconques étant non alignés | une conique dégénérée (2 droites) | |

remarque 1 : on a utilisé le fait qu'une conique non dégénérée ne peut couper une droite en plus de deux points (voir annexe).

remarque 2 (cas des 4 points) : les coefficients s'expriment tous en fonction de deux coefficients $a$ et $b$, qui peuvent être librement choisis ($\alpha\beta \neq 0$ car sinon $A$, $B$, $D$ ou $A$, $C$, $D$ seraient alignés).

remarque 3 (cas des 5 points) : les coefficients s'expriment tous en fonction d'un coefficient $b$ qui peut être librement choisi. Mais cela ne donne qu'une seule conique, car en changeant $b$, on obtient des coefficients tous proportionnels aux précédents, donc la même équation.

De plus, $\alpha'\alpha\,(\beta'(1-\alpha)-\beta\,(1-\alpha')) \neq 0$, car $\beta'(1-\alpha)-\beta\,(1-\alpha')=0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires (déterminant nul) donc les points $D$, $B$, $E$ alignés.

***Exemple :***

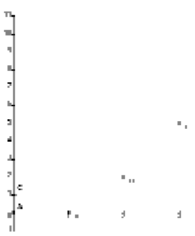
Donnons nous 5 points, par exemple : $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(3, 5)$, $E(2, 2)$.

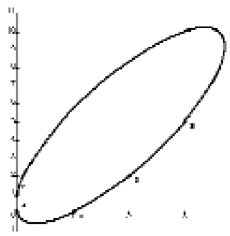
La conique passant par ces cinq points a pour équation :

$$-50\,x^2-6\,y^2+28\,xy+50\,x+6\,y=0.$$

En effet, d'après les calculs précédents, $b$ est quelconque, par exemple $b = -2$. On calcule ensuite :

$a = -50/3$ ;
$c = 28/3$ ;
$f = 0$ ;
$d = -a = 50/3$ ;
$e = -b = 2$.

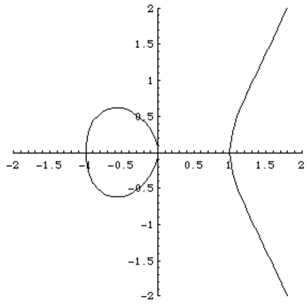




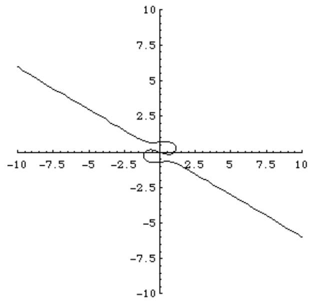
***Différentes sortes de cubiques.***

Equations : polynômes de degré 3. Voici quelques exemples. La (3) est dégénérée.

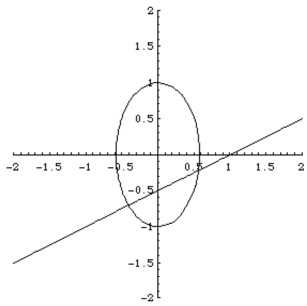
(1) : $y^2 - x^3 + x = 0$



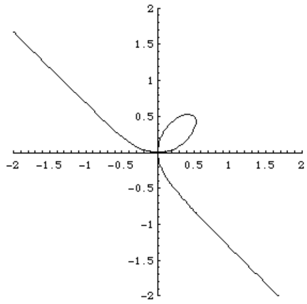
(2) : $2x(x^2 + y^2 - 1) + y(x^2 + 10y^2 - 5) = 0$



(3) : $(x - 2y - 1)(3x^2 + y^2 - 1) = 0$



(4) : $x^3 + y^3 - xy = 0$



***Ce que dit Jacobi (dans le cas des cubiques).***

Soit $U$ une expression (polynôme) d'ordre $n$ des deux variables $x$ et $y$. (Nous prendrons $n = 3$). Cette expression est définie par $(n + 1)(n + 2)/2$ soit ici 10 coefficients (qu'on note $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$).

L'équation de la courbe s'écrit $U = 0$, soit :

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+j=0$$

Donnons nous $(n + 1)(n + 2)/2 - 2$, c'est-à-dire 8 systèmes de valeurs simultanées vérifiant $U = 0$ (donc 8 points dans le plan qui devraient être situés sur la courbe). On obtient un système linéaire de 8 équations à 10 inconnues.

On peut alors exprimer 8 inconnues linéairement en fonction de deux autres.

$$(A)\begin{cases} c = m_1a + p_1b \\ d = m_2a + p_2b \\ e = m_3a + p_3b \\ f = m_4a + p_4b \\ g = m_5a + p_5b \\ h = m_6a + p_6b \\ i = m_7a + p_7b \\ j = m_8a + p_8b \end{cases}$$

L'équation $U = 0$ s'écrit alors :

$$a\left(x^3+m_1xy^2+m_2y^3+m_3x^2+m_4xy+m_5y^2+m_6x+m_7y+m_8\right) + b\left(x^2y+p_1xy^2+p_2y^3+p_3x^3+p_4xy+p_5y^2+p_6x+p_7y+p_8\right) = 0.$$

Toutes les cubiques passant par les 8 points du début ont une équation de cette forme.

Or les deux équations

$$x^3 + m_1xy^2 + m_2y^3 + m_3x^2 + m_4xy + m_5y^2 + m_6x + m_7y + m_8 = 0$$

et

$$x^2y + p_1xy^2 + p_2y^3 + p_3x^3 + p_4xy + p_5y^2 + p_6x + p_7y + p_8 = 0$$

ont $n^2$, soit 9, racines simultanées (B). Donc **toutes les cubiques passent par un même neuvième point**.

Ceci était le résumé du texte de Jacobi, appliqué aux cubiques.

Pour (A), nous proposons l'explication suivante :

On résout le système par la méthode de Gauss, c'est-à-dire :

On garde une équation $(E_1)$, on élimine une inconnue dans toutes les autres en les combinant avec $(E_1)$. On obtient alors un système composé de $(E_1)$ et de 7 équations à 9 inconnues. On garde une nouvelle équation $(E_2)$, on élimine une inconnue dans les 6 restantes en les combinant avec $(E_2)$. On obtient alors un système composé de $(E_1)$, $(E_2)$ et de 6 équations à 8 inconnues. Et on recommence. On trouvera une dernière équation à 3 inconnues : $a$, $b$, $c$ par exemple. On exprime $c$ en fonction de $a$ et $b$, et on "remonte" le système. Toutes les inconnues seront exprimées linéairement en fonction de $a$ et $b$.

Pour (B), nous essayons de démontrer en annexe que 2 cubiques se coupent en 9 points au plus.

Nous remarquons que Jacobi n'étudie aucun cas particulier. Il y a pourtant des cas où les cubiques sont "dégénérées" (composées d'une droite et d'une conique), cas où elles pourront se couper en une infinité de points.

***Combien de cubiques?***

Nous avons essayé de donner un tableau comme dans le cas des cubiques, en précisant les résultats de Jacobi pour les cubiques dans les cas particuliers qu'il n'a pas indiqués. Par exemple 7 points parmi les 8 points donnés sont situés sur une même conique, les cubiques passant par ces 8 points sont dégénérées, car sinon une cubique et une conique se coupent en au plus 6 points (voir annexe).

Toutes les cubiques passant par les 8 points sont donc réunion d'une droite et de la conique contenant les 7 points. Elles ont donc une infinité de points communs.

| ***nombre de points*** | ***nombre de cubiques*** |
|---|---|
| 8 points<br>4 points quelconques n'étant pas alignés<br>7 n'étant pas sur une même conique | infinité de cubiques passant toutes par un même neuvième point |
| 8 points<br>4 points étant alignés<br>7 étant sur une même conique | infinité de cubiques dégénérées |
| 9 points<br>cas particulier où le neuvième point est celui défini par les 8 autres | infinité de cubiques |
| 9 points<br>cas général | une seule cubique |

remarque (dans le cas où on se donne 9 points) :

On doit résoudre un système linéaire à 9 équations et 10 inconnues. Dans le cas général les inconnues s'expriment toutes en fonction de l'une d'entre elles, qui peut être librement choisie. Mais cela ne donne qu'une seule cubique, car en changeant $b$, on obtient des coefficients tous proportionnels aux précédents, donc la même équation.

***Exemples de cubiques passant par 8 points.***

Prenons 8 points, par exemple :

$$A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1), D(2, 0),$$
$$E(–2, –1), F(–3, –3),$$
$$G(4, 2), H(5, – 2).$$

Avec un peu de temps nous finissons par résoudre le système et nous trouvons toutes les courbes d'équation $a\, f(x, y) + b\, g(x, y) = 0$ où $a$ et $b$ sont des constantes quelconques et où :

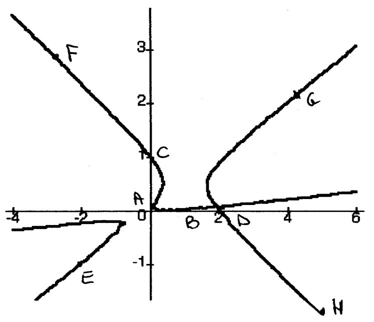
$$f(x, y) = 27\, x^3 + 1172\, y^3 – 392\, x^2y + 54\, xy^2 – 81\, x^2 – 1208\, y^2 + 802\, xy + 54\, x + 36\, y$$

$$g(x, y) = 21\, x^3 + 576\, y^3 – 196\, x^2y + 2\, xy^2 – 63\, x^2 – 564\, y^3 + 426\, xy + 42\, x – 12\, y.$$

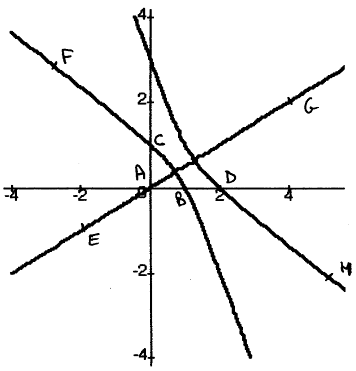
En traçant les courbes avec un logiciel (Maple), d'abord une grande satisfaction, elles passent toutes par les 8 points prévus, puis une déception, nous n'arrivons pas à trouver le neuvième point d'intersection. Pourtant il existe bien …

En demandant à Maple de résoudre le système, on trouve que le neuvième point est un des huits précédents, le point $D$, qui est un point double (toutes les courbes ont même tangente en ce point).

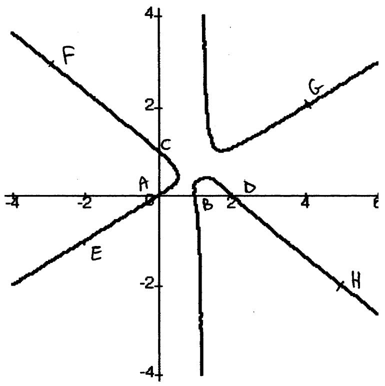
Courbes correspondant à




$(a, b) = (1, 0)$,




$(a, b) = (2, -1)$,




$(a, b) = (576, 1172)$.

***Annexe : intersections de courbes.***

Nous utilisons sans plus de démonstration le fait qu'un polynôme de degré $n$ a au plus $n$ racines.

**Une conique non dégénérée et une droite ont au plus deux points d'intersection**, (et : **une cubique non dégénérée et une droite ont au plus trois points d'intersection**).

En effet soit une droite d'équation $y = ax + b$, si nous remplaçons $y$ par $ax + b$ dans l'équation de la conique (respectivement : de la cubique) nous obtenons une équation en $x$ de degré 2 au plus (respectivement : de degré 3 au plus) donc 2 (respectivement : 3) points d'intersection.

Le cas particulier survient lorsqu'en remplaçant $y$ par $ax + b$, on obtient $0 = 0$. Cela signifie que toute la droite $y = ax + b$ est inclue dans la conique (respectivement : la cubique). Celle ci est donc dégénérée, c'est-à-dire réunion de deux droites (respectivement : réunion d'une droite et d'une conique).

**Deux coniques distinctes non dégénérées ont au plus 4 points d'intersection.**

Considérons le système

$$\begin{cases} a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f = 0 \\ a' x^2 + b' y^2 + c' x y + d' x + e' y + f' = 0 \end{cases}$$

En éliminant les termes en $x^2$, on trouve

$$x P_1(y) + P_2(y) = 0,$$

$P_1$ et $P_2$ étant des polynômes de degré respectivement 1 et 2 de la variable $y$.

En remplaçant ensuite $x$ par $P_2(y)/P_1(y)$ dans une des deux équations de coniques et en réduisant au même dénominateur, on trouve une équation de degré au plus 4, d'inconnue $y$. Or un polynôme non nul de degré 4 au plus a au plus 4 racines.

**Une conique et une cubique non dégénérées ont au plus 6 points d'intersection.**

Considérons le système :

$$\begin{cases} ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 \\ \quad + gxy + hx + ky + i = 0 \\ a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y + f' = 0 \end{cases}$$

Nous prenons par la suite, pour simplifier, la notation suivante : $P_i$, $Q_i$, $R_i$, etc … désignent des polynômes en $y$ de degré $i$ (au plus).

Le système s'écrit

$$\begin{cases} P_0\,x^3 + P_1\,x^2 + P_2\,x + P_3 = 0 \\ Q_0\,x^2 + Q_1\,x + Q_2 = 0 \end{cases}$$

En combinant ces équations ($P_0 \times x \times$ (2ème ligne) – $Q_0 \times$ (1ère ligne)) pour éliminer le terme en $x^3$, et en posant :

$$R_1 = P_0\,Q_1 - Q_0\,P_1,$$
$$R_2 = P_0\,Q_2 - Q_0\,P_2,$$
$$R_3 = -\,Q_0\,P_3,$$

on obtient
$$\begin{cases} R_1\,x^2 + R_2\,x + R_3 = 0 \\ Q_0\,x^2 + Q_1\,x + Q_2 = 0 \end{cases}$$

En combinant à nouveau ces équations ($R_1 \times$ (2ème ligne) – $Q_0 \times$ (1ère ligne)) et en posant :

$$S_2 = R_1\,Q_1 - Q_0\,R_2,$$
$$S_3 = R_1\,Q_2 - Q_0\,R_3,$$

on obtient
$$\begin{cases} S_2\,x + S_3 = 0 \\ Q_0\,x^2 + Q_1\,x + Q_2 = 0 \end{cases}$$

On tire $x = -\,S_3/S_2$ et en remplaçant dans la deuxième équation $x$ par cette valeur :

$$Q_0\,(S_3)^2 - Q_1\,S_2\,S_3 + Q_2\,(S_2)^2 = 0.$$

Ainsi $y$ doit obligatoirement être racine d'un polynôme de degré au plus 6. Donc il y a au plus 6 valeurs de $y$, donc au plus 6 points d'intersection pour les deux courbes.

Remarque pour les puristes : on peut ne pas écrire $x$ avec un dénominateur (qui pourrait s'annuler). Il suffit d'écrire :

$$(S_2)^2\,(Q_0\,x^2 + Q_1\,x + Q_2) = 0$$

et de remplacer $S_2\,x$ par $S_3$.

**Deux cubiques distinctes non dégénérées ont au plus 9 points d'intersection.**

Considérons le système

$$\begin{cases} ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 \\ \quad + gxy + hx + ky + i = 0 \\ a'x^3 + b'y^3 + c'x^2y + d'xy^2 + e'x^2 + f'y^2 \\ \quad + g'xy + h'x + k'y + i' = 0 \end{cases}$$

Nous prenons la même méthode :

Le système s'écrit

$$\begin{cases} P_0\,x^3 + P_1\,x^2 + P_2\,x + P_3 = 0 \\ P'_0\,x^3 + P'_1\,x^2 + P'_2\,x + P'_3 = 0 \end{cases}$$

En combinant ces équations ($P_0 \times$ (2ème ligne) – $P'_0 \times$ (1ère ligne)) pour éliminer le terme en $x^3$, on obtient

$$\begin{cases} P_0\,x^3 + P_1\,x^2 + P_2\,x + P_3 = 0 \\ Q_1\,x^2 + Q_2\,x + Q_3 = 0 \end{cases}$$

En combinant encore ($Q_1 \times$ (1ère ligne) – $x \times P_0 \times$ (2ème ligne)), en supposant d'ailleurs que $Q_1$ ne s'annule pas pour les points d'intersection cherchés, et en posant

$$R_2 = Q_1\,P_1 - P_0\,Q_2,$$
$$R_3 = Q_1\,P_2 - P_0\,Q_2,$$
$$R_4 = Q_1\,P_3,$$

on obtient
$$\begin{cases} R_2\,x^2 + R_3\,x + R_4 = 0 \\ Q_1\,x^2 + Q_2\,x + Q_3 = 0 \end{cases}$$

En combinant ($R_2 \times$ (2ème ligne) – $Q_1 \times$ (1ère ligne)) et en posant …

$$S_4 = R_2\, Q_2 - Q_1\, R_3,$$
$$S_5 = R_2\, Q_3 - Q_1\, R_4,$$

on obtient
$$\begin{cases} S_4\, x + S_5 = 0 \\ Q_1\, x^2 + Q_2\, x + Q_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient donc finalement

$$x = -\frac{S_5}{S_4}$$

et

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{Q_2 S_5 - Q_3 S_4}{Q_1 S_4} \\ &= \frac{Q_3 R_3 - Q_2 R_4}{S_4} \end{aligned}$$

et donc $(S_5)^2 = S_4\,(Q_3\, R_3 - Q_2\, R_4)$.

Ce polynôme semble être de degré 10, mais avec un peu de courage, en remplaçant $S_4$ et $S_5$, on obtient : $(R_2)^2(Q_3)^2 + (Q_1)^2(R_4)^2 - 2\, R_2Q_3Q_1R_4 - R_2Q_2Q_3R_3 - R_2(Q_2)^2R_4 - Q_1(R_3)^2Q_3 + Q_1R_3Q_2R_4 = 0$.

Comme $R_4 = Q_1\, P_3$, tous les termes ont $Q_1$ en facteur sauf $(R_2)^2\, (Q_3)^2 - R_2\, Q_2\, Q_3\, R_3$. Remplaçons $R_2$ et $R_3$ par leurs valeurs, on a :

$$\begin{gathered} (R_2)^2(Q_3)^2 - R_2Q_2Q_3R_3 = \\ R_2Q_3(Q_1P_1Q_3 - P_0Q_2Q_3 - Q_2Q_1P_2 + Q_2P_0Q_3) \\ = R_2Q_3Q_1\,(P_1Q_3 - P_2Q_2). \end{gathered}$$

Ainsi le polynôme de degré 10 est produit de $Q_1$, (qu'on a supposé non nul) par un polynôme de degré 9. Donc il y aurait au plus 9 valeurs de $y$, donc 9 points d'intersection pour les deux cubiques.

(PS : cette démonstration est un peu fastidieuse, il reste de plus à étudier le cas où $Q_1$ s'annule. Si quelqu'un peut démontrer plus simplement que deux cubiques se coupent en 9 points, qu'il nous envoie la solution !)