mouvement des corps

par Fatima Mekheteche, Betul Nizamoglu, Laetitia Plewinski, Iyani Tanthrilage, élèves de Terminale S du Lycée Georges Braque, Argenteuil (95)

enseignants : Joëlle Richard, Halim Yahiaoui

chercheur : Stéphane Labbé

lycée Georges Braque d'Argenteuil (95) — ***mouvement de corps***
Un corps M est soumis à la gravité d'un autre corps O. Quel est le mouvement de M lorsque O est fixe ? lorsque O est mobile ?

Nous nous intéressons aux mouvements des corps. Un exemple en est le mouvement des planètes.

Bien sûr, nous direz-vous, aujourd'hui nous savons tous qu'une planète décrit une ellipse autour du soleil, et cela grâce à Kepler et Newton.

Depuis Kepler, on sait que les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers. Plus tard Newton en énonçant la loi d'attraction universelle, a en fait rassemblé toutes les lois découvertes par Kepler.

Cependant notre approche du problème a été différente. Nous avons considéré un corps de centre de gravité M, soumis à la gravité d'un autre corps de centre de gravité O, O pouvant être fixe ou mobile.

Le mouvement de M est régi par l'équation vectorielle suivante :

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = k\,\frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3}$$

qui est en fait une équation différentielle * du second ordre.

Nous cherchons, à partir de cette équation, à déterminer la trajectoire du point ï. Même si elle est très complexe, nous allons tenter de vous l'expliquer et de la simplifier.

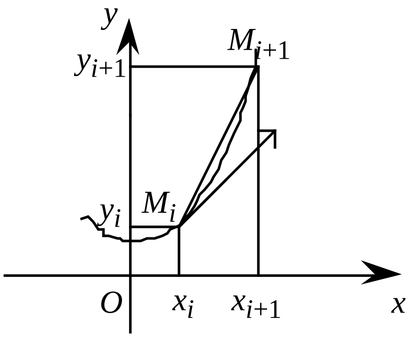
---

* *Remarque* :

Pour des précisions concernant les notions de « dérivée » et « d'équation différentielle », nous invitons le lecteur à se reporter à l'article précédent, intitulé « maths attacks : the return … », pp. 219 à 221 de cette brochure.

Utilisation des propriétés des dérivées :

Nous faisons comme si les mouvements avaient lieu dans un plan muni d'un repère.



Soit un point $M(x, y)$, se déplaçant sur C_f et deux positions distinctes M_i et M_{i+1} aux temps t_i et t_{i+1}. Nous savons que le vecteur vitesse en un point de la trajectoire du mobile M est tangent en M à cette trajectoire ; en projection sur l'axe Ox, la composante de la vitesse est égale à :

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}$$

On peut considérer ce rapport comme une approximation au temps t_i de la dérivée dx/dt (*cf.* article " courbes de Lorenz "). De même si nous dérivons une deuxième fois nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}(x_{i+1})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}(x_i)}{\mathrm{d}t}}{\Delta t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta x}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_{i+1}) - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_i)}{\Delta t}$$

$$\approx \frac{\frac{(x_{i+1+1} - x_{i+1}) - (x_{i+1} - x_i)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\approx \frac{(x_{i+2} - 2\,x_{i+1} + x_i)}{\Delta t^2}$$

L'équation de départ est :

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = k\,\frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3}$$

En projection sur l'axe Ox, les vecteurs des 2 membres de (1) ont des composantes égales, or $\overrightarrow{OM}$ a pour composante x_{i+1}, et

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2}$$

d'où :

$$\frac{x_{i+2} - 2\,x_{i+1} + x_i}{\Delta t^2} \approx k\,\frac{x_{i+1}}{\left(\sqrt{x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2}\right)^3}$$

k étant une constante.

Dans un repère du plan, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x_{i+2} - 2\,x_{i+1} + x_i}{\Delta t^2} \approx k\,\dfrac{x_{i+1}}{\left(\sqrt{x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2}\right)^3} \\ \dfrac{y_{i+2} - 2\,y_{i+1} + y_i}{\Delta t^2} \approx k\,\dfrac{y_{i+1}}{\left(\sqrt{x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2}\right)^3} \end{cases}$$

par exemple, si l'on prend $i = 0$ on aura $i + 1 = 1$ et $i + 2 = 2$ d'où pour les premiers rangs :

$$\frac{1}{\Delta t^2}(x_2 - 2\,x_1 + x_0) = k\,\frac{x_1}{\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^3}$$

soit encore :

$$x_2 = \Delta t^2\,\frac{k\,x_1}{\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^3} + 2\,x_1 - x_0$$

Connaissant x_0 et x_1 on peut déduire x_2, l'équation suivante permet de connaître x_3 et ainsi de suite. Les coordonnées des points s'obtiennent donc successivement et on peut dessiner une suite de petits segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, … $[M_nM_{n+1}]$… ce qui constitue une approximation de la trajectoire du mobile M.

Il est impossible de faire les calculs à la main. L'ordinateur peut nous aider à obtenir les " trajectoires " des " planètes ".

Courbes obtenues

Pratiquement nous avons fait le choix de conditions initiales : s'il s'agit d'un corps dont on étudie la trajectoire autour d'un point fixe de coordonnées $x = 0$, $y = 0$, sa position de départ M_0 est déterminée par ses coordonnées x_0, y_0, et son vecteur vitesse initial a pour coordonnées x'_0, y'_0. Nous obtenons les coordonnées du point M_1 par les égalités :

$$x_1 = x_0 + t.x'_0$$
$$y_1 = y_0 + t.y'_0$$

Nous avons d'abord utilisé le logiciel Q-Basic disponible dans notre lycée et déjà nous avons vu se dessiner des courbes suggestives mais pas très satisfaisantes. Nous vous présentons ici quelques courbes tracées grâce au logiciel Mathlab.

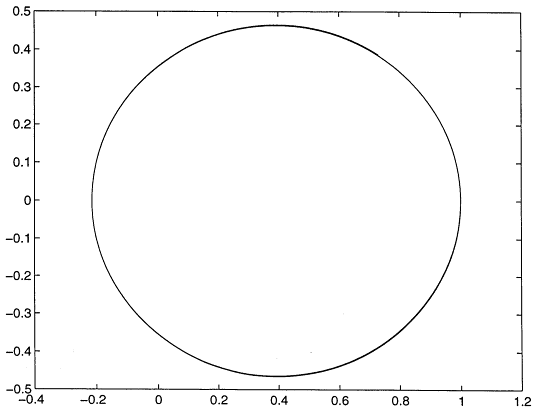


Figure 1. Mouvement d'un seul corps autour d'un point fixe $O(0,0)$; **conditions initiales :**
$M_0(x_0 = 1, y_0 = 0)$
Vecteur vitesse($x'_0 = 0, y'_0 = -0.59460355$)
$t = 0.0105$; n, nombre de pas : 500

Explication.

La trajectoire obtenue est une ellipse dont un des foyers est le point O.

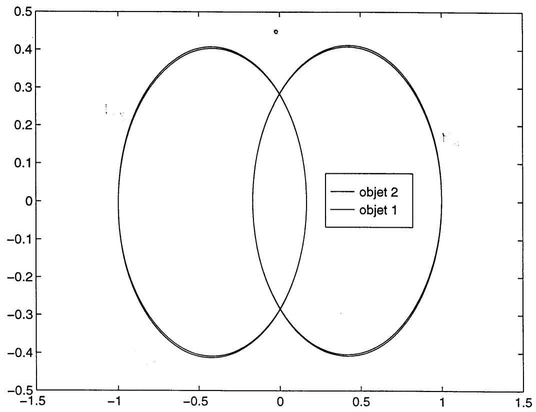


Figure 2 Mouvement de 2 corps autour d'un point attractif comme par exemple le soleil de coordonnées (0, 0) ; constantes gravitationnelles exercées par les 2 corps et le centre attractif : $k_0 = 1$, $k_1 = 1$ (attraction du corps 1 par le corps 2), $k_2 = 1$ (attraction du corps 2 par le corps 1) ; **conditions initiales :**
$M_1(x_{01} = 1, y_{01} = 0)$
Vecteur vitesse ($x'_{01} = 0, y'_{01} = -0.594$)
$M_2(x_{02} = -1, y_{02} = 0)$
Vecteur vitesse ($x'_{02} = 0, y'_{02} = 0.594$)
$t = 0.01$

Explication.

Les 2 corps M_1 et M_2 sont lâchés avec des vitesses initiales de même norme. Les constantes d'attraction k_1 et k_2 sont égales, il n'y a donc pas d'attraction plus importante d'un des 2 corps par l'autre et ils décrivent tous les deux des ellipses autour du point O.

Remarque.

Cette fois-ci, O n'est pas un foyer des ellipses. Cela peut être dû à l'interaction entre les 2 astres M_1 et M_2.

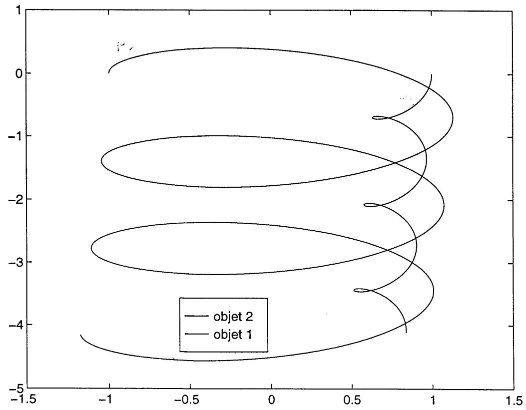


Figure 3 Mouvement de deux corps autour d'un point fixe $O(0, 0)$: constantes gravitationnelles : $k_0 = 0.01$ (attraction de M_1 et M_2 par O), $k_1 = 6$ (attraction du corps M_1 par le corps M_2), $k_2 = 1$ (attraction du corps M_2 par le corps M_1) ; **Conditions initiales :**
$M_1(x_{01} = -1, y_{01} = 0)$
Vecteur vitesse ($x'_{01} = 0, y'_{01} = 0.594$)
$M_2(x_{02} = 1, y_{02} = 0)$
Vecteur vitesse ($x'_{02} = 0, y'_{02} = -0.594$) $t = 0.01$

Explication.

Les deux corps M_1 et M_2 sont lâchés avec des vitesses initiales de même norme. Cette fois-ci, la constante gravitationnelle k_0 est très faible, ce qui explique que les 2 corps ne restent pas " piégés " autour de O et ne décrivent pas une trajectoire elliptique. Ils sont en fait attirés l'un par l'autre et ont donc des trajectoires semblables en forme de ressort. Mais l'attraction de M_1 par M_2 étant plus importante, M_1 est fortement attiré par M_2 et acquiert ainsi une vitesse importante, ce qui explique l'ampleur de sa trajectoire, tandis que M_2 est plus faiblement attiré par M_1, sa trajectoire a donc une amplitude moins importante car il acquiert une vitesse plus faible.

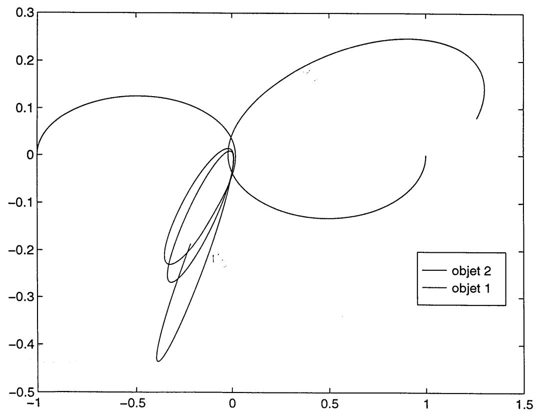


Figure 4 Mouvement de deux corps autour d'un centre attractif $O(0, 0)$; constantes gravitationnelles : $k_0 = 10$, $k_1 = 6$, $k_2 = 1$; **Conditions initiales :**
$M_1(x_{01} = -1, y_{01} = 0)$
Vecteur vitesse ($x'_{01} = 0, y'_{01} = 0.594$)
$M_2(x_{02} = 1, y_{02} = 0)$
Vecteur vitesse ($x'_{02} = 0, y'_{02} = -0.594$)
$t = 0.001$; nombre de pas, $n = 10\,000$

Explication.

Les deux corps M_1 et M_2 sont encore lâchés avec des vitesses de même norme. La constante k_0 est très grande, les deux corps M_1 et M_2 sont très fortement attirés ; de plus, M_1 est attiré également par M_2 ($k_1 > k_2$) ce qui explique sa trajectoire très aplatie et quasi inexistante. On peut émettre l'hypothèse que M_1 s'écrasera sur O.

Conclusion.

Au cours de cette étude, nous avons pu voir que la trajectoire décrite par une planète dans son mouvement autour du soleil est une ellipse. Quand nous avons simulé le mouvement de deux corps, même si les trajectoires se déformaient, elles gardaient une forme assimilable à celle d'une ellipse.

Le système solaire est-il donc stable ? Et peut-on faire des prévision à très long terme sur les mouvements des planètes ? D'après des découvertes récentes, on peut dire maintenant, en citant Ivar Ekeland (LE CHAOS) « le système solaire est stable et régulier à l'échelle du million d'années ; il est chaotique à l'échelle de cent millions d'années ».