

# et si on l'écrase ? ou des tentatives pour aplatir une sphère.

par Wafa Sekita, Frédéric Tribeau, Emilie Lang, Ngau Uy Kheang, Michel Meireles, Audrey Bensaid, Atelier de pratique scientifique du lycée Jean Macé de Vitry (94)

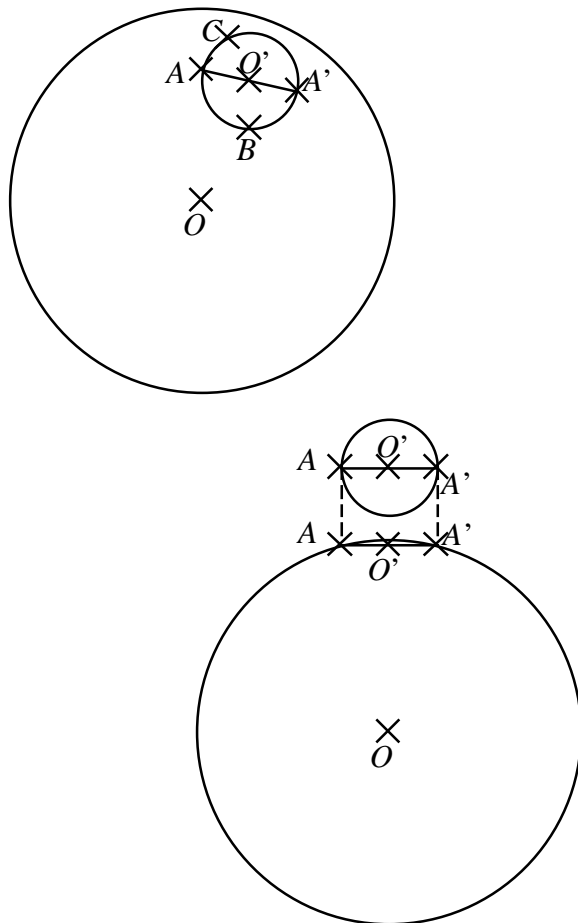
enseignante : Karin van Effenterre

chercheur : Christophe Hazard

lycée de Vitry (94) — ***aplatissement de la sphère***

Peut-on aplatir une sphère ? Quel est le plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère ?

Nous tenons à remercier Madame A. M. Divetain, grâce à laquelle nous avons pu connaître la plupart des ouvrages utilisés.



*En cette nouvelle saison de l'Atelier Scientifique, nous avons fait le projet de travailler sur le thème de la cartographie, car nous voulions savoir comment on pouvait représenter la Terre sur un planisphère. Au début, nous ne savions pas comment orienter nos recherches, car ce thème nous semblait très vaste.*

*Un jour, la prof de philo nous a posé ce problème : peut-on aplatir la sphère sans la déformer ? L'un d'entre nous a répondu catégoriquement que ce n'était pas possible. La prof de philo prétendait au contraire qu'elle pouvait découper une peau d'orange d'une certaine façon pour l'aplatir sans la déformer, et nous étions convaincus du contraire. A partir de cette simple question, nous avons découvert que tout ce qui se passait sur la sphère était " spécial "; on peut aplatir un cube ou un cylindre, mais peut-on faire de même avec une sphère ?*

## ***Peut-on aplatir une sphère sans déformation ?***

Est-ce qu'on peut aplatir une sphère en conservant toutes les longueurs, les formes, les surfaces ?

On arrive à aplatir un cylindre en le découpant, tout en conservant les longueurs intactes. On peut dire alors qu'on a aplati le cylindre sans déformation. Alors que dans le cas d'une sphère, l'aplatissement paraît impossible : on n'arrive pas à aplatir une demi-sphère, un quart de sphère; on est obligé, à chaque fois, de découper encore plus.

Montrons qu'on ne peut aplatir une toute petite surface, aussi petite soit elle, sans la déformer.

Sur une surface, aussi petite soit-elle, il y a au moins trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés. Ces trois points définissent un plan qui coupe la sphère suivant un cercle auquel appartiennent  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Ce cercle délimite une petite calotte sphérique. Comparons la longueur d'un diamètre, par exemple  $[AA']$ , du cercle passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$ , et la longueur de l'arc  $AA'$ ,

arc du grand cercle passant par  $A$  et  $A'$  de la sphère. Comme le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite, l'arc  $AA'$  est plus long que le segment  $[AA']$ , et cet arc ne pourra pas être aplati dans le cercle considéré.

Par le calcul :

$$\begin{aligned} \text{arc } AA' &= R \times \alpha \\ AA' &= 2 R \times \sin (\alpha/2) \\ \frac{AA'}{\text{arc } AA'} &= \frac{\sin (\alpha/2)}{\alpha/2} \end{aligned}$$

Etant donné qu'on ne peut pas aplatir une partie de la sphère, aussi petite soit elle, en gardant intactes toutes les longueurs, la réponse à notre question de départ est bien : « On ne peut pas aplatir une sphère sans la déformer. »

*Dans le plan, le plus court chemin entre deux points est le segment, mais qu'en est-il sur la sphère ? Si on tend un élastique entre deux points sur un ballon, on voit que l'élastique a une position d'équilibre, qui correspond au plus court chemin entre les deux extrémités, et ce plus court chemin entre deux points est un arc de grand cercle.*

**Le plus court chemin entre 2 points d'une sphère.**

**Le plus court des arcs de cercle entre deux points d'une sphère**

Considérons une sphère  $C$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Soient  $A$  et  $B$  2 points de la sphère, et soit  $\alpha$  la mesure de l'angle  $AOB$  en radian.

Par 2 points appartenant à une sphère il passe une infinité d'arcs, ces arcs étant définis comme étant à l'intersection d'une infinité de plans et de la sphère  $C$ . On constatera 2 types d'arc :

- L'arc  $AB$  centré en  $O$ .

L'arc  $AB$  centré en  $O$  appartient à un grand cercle (un grand cercle étant l'intersection de la sphère avec un plan  $P$  passant par  $O$ , il y en a une infinité sur une sphère) sa mesure est définie par :  $\alpha \cdot R$ , où  $R$  désigne le rayon du grand cercle.

- Les arcs  $AB$  non centrés en  $O$  (on dira d'eux qu'ils sont centrés en  $\Omega$ ).

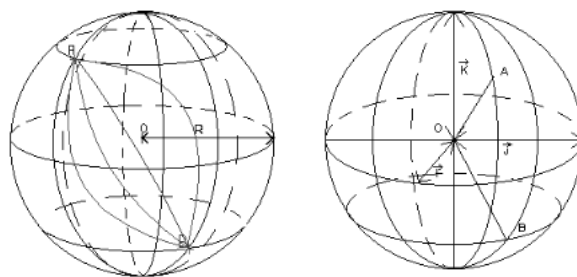
Ces arcs résultent de l'intersection d'un plan  $P'$  passant par  $\Omega$  avec la sphère; on déterminera leur mesure par :  $r \cdot \beta$

$r$  désignant  $[\Omega, A]$  et  $\beta$  désignant  $A\Omega B$   
 $\lambda$  désignant l'inclinaison de  $P'$  par rapport à  $P$ , on définit la mesure des arcs  $AB$  centrés en  $\Omega$  en fonction de :  $\alpha$ ,  $R$  et  $\lambda$

On obtient :  $AB$  centré en  $\Omega =$

$$R \sqrt{1 - \cos^2 \alpha/2 \sin^2 \lambda} \times \sin^{-1} \left( \frac{\sin (\alpha/2)}{R \sqrt{1 - \cos^2 \alpha/2 \sin^2 \lambda}} \right)$$

Nous avons donc une expression à deux variables  $\alpha$  et  $\lambda$  pour la mesure des arcs  $AB$  centrés en  $\Omega$ , ou en  $O$ , avec  $\lambda = 0$ . Afin de déterminer l'arc le plus court nous prendrons plusieurs valeurs pour la variable  $\lambda$  en gardant l'autre constante, et on trace la représentation graphique de cette fonction ; et l'on constate que  $AB$  centré en  $O$  est toujours inférieur à  $AB$  centré en  $\Omega$  sauf si l'une des trois variables est égales à 0 auquel cas tous les arcs  $AB$  sont égaux .



**Mesure de cet arc AB en fonction de la latitude et de la longitude**

Nous avons déterminé, précédemment, que la plus courte distance entre 2 points  $A$  et  $B$  de la sphère est :  $\alpha \cdot R$ ,  $R$  étant donné ; il ne nous reste qu'à exprimer  $\alpha$  en fonction de la latitude  $\varphi$  et de la longitude  $\theta$  de ces 2 points,

Coordonnées, dans un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :  $A(x ; y ; z)$  et  $B(x' ; y' ; z')$

On obtient :

- pour A :  $x = R \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi$  ;  
 $y = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$  ;  
 et  $z = R \cdot \sin \theta$
- pour B :  $x' = R \cdot \cos \theta' \cdot \cos \varphi'$  ;  
 $y' = R \cdot \sin \theta' \cdot \cos \varphi'$  ;  
 et  $z' = R \cdot \sin \theta'$

On sait que le produit scalaire des vecteurs  $OA$  et  $OB$  est  $xx' + yy' + zz' = OA \times OB \times \cos \alpha$  avec  $OA = OB = R$ , ce qui donne :

$$(xx' + yy' + zz')/R^2 = \cos \alpha$$

On obtient donc :

$$AB = R \times \cos^{-1}(\cos \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot \cos(\theta - \theta') + \sin \varphi \cdot \sin \varphi')$$

Nous concluons donc en disant que le plus court chemin entre 2 points A et B sur une sphère est une portion d'arc de grand cercle de la sphère dont la mesure est :

$$AB = R \times \cos^{-1}(\cos \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot \cos(\theta - \theta') + \sin \varphi \cdot \sin \varphi')$$

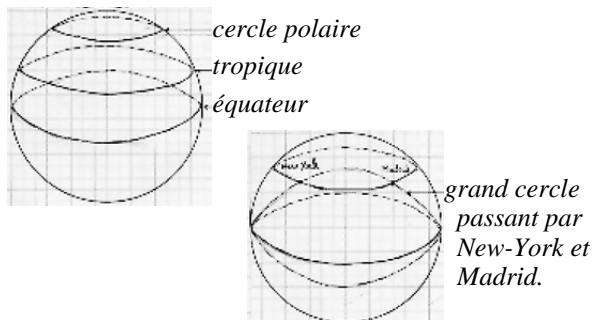
*Maintenant que l'on sait que le segment sur un plan correspond à un arc de grand cercle sur une sphère, on peut regarder ce que devient un angle, un triangle sur la sphère par exemple. On a étudié quelques aspects des triangles curvilignes.*

**Les triangles sphériques.**

Un triangle sur la sphère est constitué par trois arcs empruntés à trois grands cercles.

**• Qu'est-ce qu'un grand cercle ?**

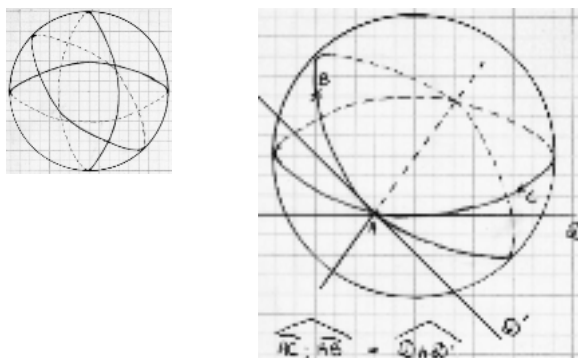
Sur la planète Terre, les cercles polaires, les tropiques, l'Equateur sont des parallèles. Madrid et New York sont sur le même parallèle. Mais les parallèles ne sont pas toujours le plus court chemin d'un point à un autre : le plus court chemin, c'est l'arc de grand cercle (c'est la question de « l'orthodromie » présentée plus haut.)



**• Qu'est-ce qu'un angle ?**

On définira un angle sur une sphère par l'intersection de deux arcs (ici ,arc AB et arc AC) empruntés à deux grands cercles. On peut caractériser cet angle par les deux tangentes formées par la droite d'intersection des deux plans des grands cercles.

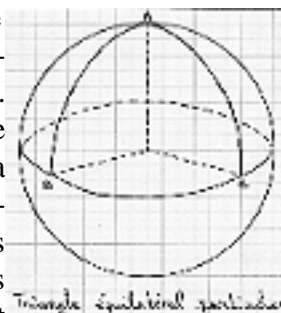
En effet, les deux grands cercles caractérisent deux plans et une droite d'intersection. Cette droite d'intersection est orthogonale aux deux tangentes passant par le point d'intersection formé par les deux arcs de cercle



**• Quelle peut être la somme des mesures des angles d'un triangle sphérique ?**

Comme nous ne sommes pas sur un plan, nous nous sommes demandés si la propriété " la somme des mesures des angles d'un triangle est 180°" est respectée sur la sphère.

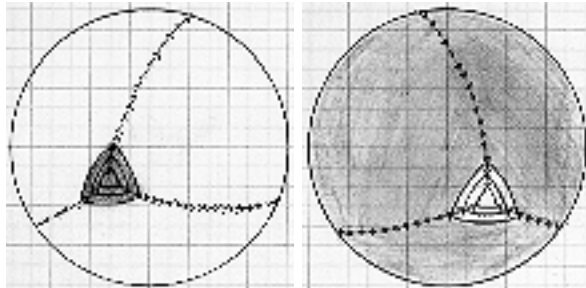
Nous avons étudié le cas particulier des triangles équilatéraux. En prenant le triangle occupant 1/8<sup>ème</sup> de la sphère, on peut constater que la somme des mesures des angles de ce triangle vaut  $3 \times 90^\circ = 270^\circ$ .



Alors, il doit exister d'autres triangles équilatéraux n'ayant pas d'angles droits, et donc des triangles dont la somme des angles est aussi différente de 180°. Pour répondre à cette question, on a effectué une migration des sommets sur la sphère afin de voir la progression des angles.

Le plus petit triangle équilatéral aura la somme de ses angles supérieurs strictement à  $180^\circ$ , car on ne peut pas parler de plan (voir partie I). Le plus grand triangle équilatéral aura des angles qui vaudraient au maximum chacun  $360 - 60 = 300^\circ$ . La somme des angles est strictement inférieure à  $3 \times 300 = 900^\circ$

En conclusion : la somme des angles d'un triangle équilatéral sphérique est comprise strictement entre  $180^\circ$  et  $900^\circ$ .

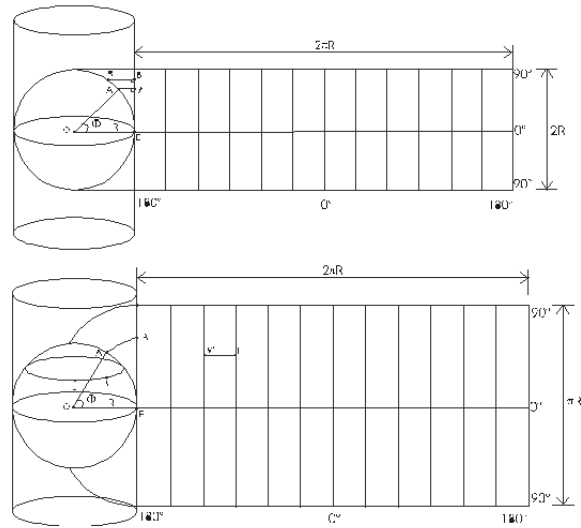
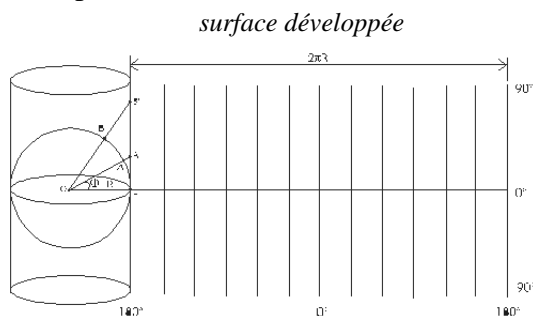


*Puisque les règles de la géométrie plane ne s'appliquent pas à la géométrie sphérique, comment peut-on faire pour rendre compte du monde, supposé sphérique, avec des représentations planes (atlas, cartes...). Nous avons étudié des moyens différents de projeter une sphère sur un plan.*

**Les projections cylindriques.**

*Après avoir vu qu'on ne peut pas aplatir une sphère sans déformation, on va maintenant voir les différents modes de projection d'une sphère sur une surface que l'on peut aplatir et on a pensé à deux sortes de projections : la projection sur un cylindre et la projection sur un cône.*

On va d'abord s'intéresser aux projections cylindriques, pour cela, on a étudié trois projections, les premières qui nous soient venues à l'esprit.

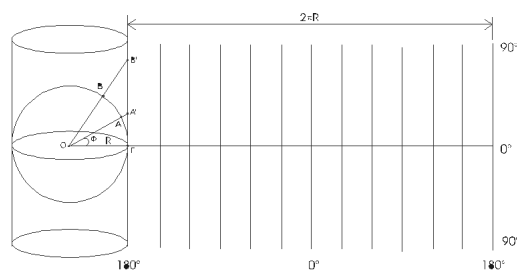


Nous avons voulu calculer les déformations subies pour chaque projection. On va pour chacune d'entre elles calculer la distance entre deux points de même longitude, d'abord sur la sphère puis sur le plan. On pourra alors évaluer les déformations et étudier les différents aspects de chaque projection.

On précise pour chaque projection que :

- $R$  = rayon de la sphère
- $\varphi$  = latitude en degré
- $\theta$  = longitude en degré
- $E$  = point au niveau de l'équateur
- $A$  = point quelconque sur la sphère
- $A'$  = projeté de  $A$  sur le cylindre

La première projection est appelée projection cylindrique perspective. Elle se fait à l'aide d'un cylindre tangent à la sphère au niveau de l'équateur. La projection des différents points  $M$  de la sphère s'obtient par intersection de la demi-droite  $[OM)$  et du cylindre.



projection cylindrique perspective

On remarque sur cette projection que :

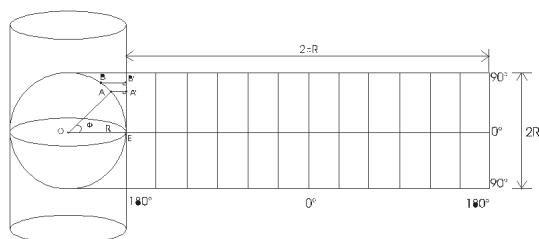
- le point et son image sont alignés avec  $O$  ;

- $E$  est l'image de  $E$  car le cylindre est tangent à l'équateur donc il n'y a pas de déformation pour les points de l'équateur ;
- les pôles sont projetés à l'infini.

On a donc calculé la distance entre deux points de même longitude sur la sphère :  $EA = \varphi \times 2\pi R / 360$  ;  $EA' = R \times \tan \varphi$ . On peut alors déterminer le rapport entre les distances sur la sphère et sur le cylindre :

$$EA' = EA \times 180 \times \tan \varphi / \pi \varphi$$

La deuxième projection, appelée projection isocylindrique de Lambert, celle-ci s'obtient en projetant orthogonalement les points de la sphère par rapport à l'axe des pôles sur un cylindre tangent à l'équateur. Comme pour la première projection, il y a peu de déformation au niveau de l'équateur. Plus on se rapproche des pôles et plus c'est déformé. Le dessin du plan aura donc pour largeur  $2R$  soit le diamètre de la sphère puisqu'on projette orthogonalement.

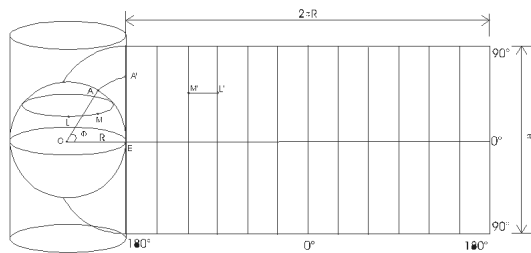


projection isocylindrique de Lambert

On a donc calculé la distance entre deux points de même longitude sur la sphère :  $EA = \varphi \times 2R / 360$  ; et sur le cylindre :  $EA' = R \times \sin \varphi$ . La déformation est donc :

$$EA' / EA = 180 \times \sin \varphi / \pi \varphi$$

La troisième projection, appelée projection cylindrique équidistante, s'obtient toujours en projetant un point de la sphère sur un cylindre tangent à l'équateur mais cette fois en respectant la distance qui le sépare de l'équateur. Il n'y a donc pas de déformation pour deux points de même longitude puisque les longueurs sont conservées. On a alors procédé à l'étude de deux points de même latitude. Au passage, cette étude peut s'appliquer pour les deux autres projections.



projection cylindrique équidistante

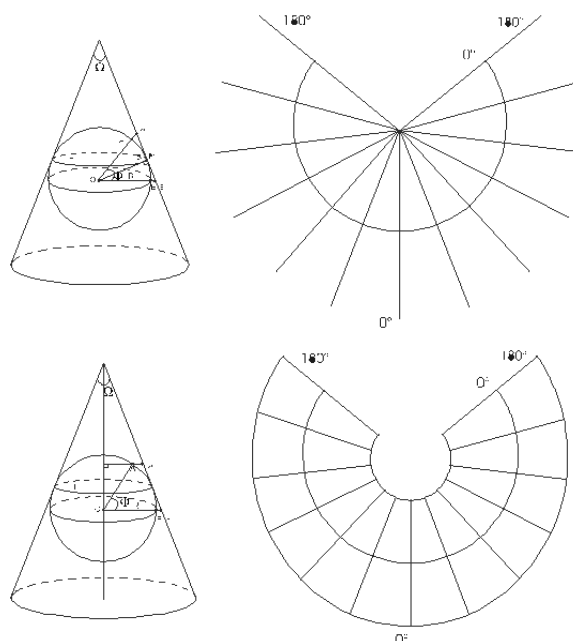
Sur la sphère :  $LM = \theta \times 2\pi R \times \cos \varphi / 360$  ;  
sur le cylindre :  $L'M' = \theta \times 2\pi R / 360$ . La déformation est donc  $L'M' / LM = \cos \varphi$ .

(Note du professeur : la longueur d'un arc de parallèle n'est pas la " distance " entre les deux points sur la sphère, sauf si le parallèle est l'Equateur lui-même, car c'est un grand cercle).

### Les projections coniques.

Après avoir étudié les projections cylindriques, on s'est occupé des projections coniques. Les deux projections qu'on a étudiées ont le même principe que les projections cylindriques.

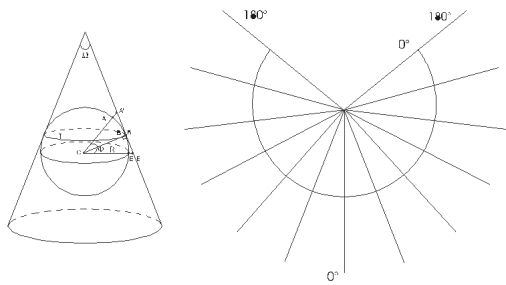
#### surfaces développées :



Pour la projection perspective, ou centrale, nous considérons une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ .  $\Omega$  désigne l'angle au sommet du cône mesuré en degrés,  $\Phi$  l'angle  $AOE$  en degrés, avec  $E$  un point sur l'équateur, et  $A$

un point quelconque sur la sphère.  $A$  et  $E$  doivent être de même longitude pour que nos calculs soient corrects, et le cône doit être tangent à la sphère en un cercle  $T$ .

Cette projection consiste à tracer la demi-droite  $[OA)$  pour obtenir le point d'intersection avec le cône qui sera le point  $A'$ . Pour le point  $E$  c'est la même méthode et pour tout autre point de la demi-sphère.



projection conique perspective

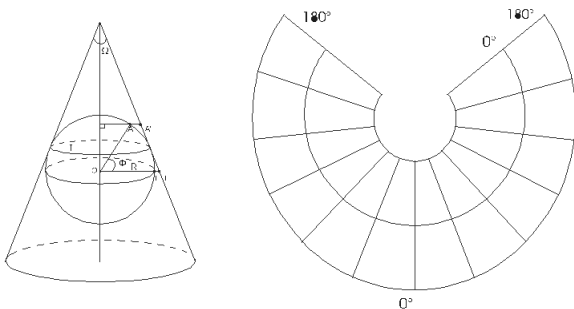
On pourra remarquer qu'il y a très peu de déformation au niveau du cercle  $T$  et plus on s'éloignera de ce cercle plus on aura de déformation.

Équation de la longueur de l'arc de cercle :  $AE = \Phi \times 2\pi R / 360$ . Équation de la longueur de la projection de l'arc sur le cône :  $A'E' = R \tan S \times R \tan (\Phi - S)$ . ( $S = \Omega/2$ ) La déformation est donc :

$$E'A' / EA = 180 \times (\tan S + \tan(\Phi - S)) / \pi\Phi.$$

Notons que cette projection est très utilisée pour projeter les pôles lorsque est  $\Omega$  obtus.

Pour la projection conforme de Lambert on aura les mêmes notations que pour la première. Cette projection consiste à tracer une droite perpendiculaire à l'axe de la terre qui coupera le cône en un point  $A'$ , de même pour la projection de  $E$  et pour tout autre point de la



projection conique conforme de Lambert

demi-sphère. On pourra remarquer qu'il n'y a pas beaucoup de déformations au niveau du cercle  $T$  ; plus on ira vers les pôles, plus ce sera aplati. De même pour cette projection l'arc de cercle aura pour équation :  $AE = \Phi \times 2\pi R / 360$ , la distance sur le cône sera :  $A'E' = R \sin \Phi / \cos S$ . ( $S = \Omega/2$ ) La déformation est :  $A'E' / AE = (180 \times \sin \Phi) / (\pi\Phi \times \cos S)$ . Pour rendre tout cela plus concret, on a fait des calculs avec des distances réelles en km et des villes réelles. Les déformations pour chaque projection se voient donc plus nettement. On a établi un tableau de comparaison avec trois villes, la première étant située sur l'équateur et les deux autres plus ou moins éloignées mais ayant toutes les trois la même longitude. On a d'abord calculé la distance réelle sur la sphère puis la distance sur chaque projection :

Villes	Libreville	Tunis	Hambourg	Trondheim
(10°E)	(Gabon)			(Norvège)
Latitude	0°	37°N	53°N	63°N
Distance réelle	<b>0 km</b>	<b>4132 km</b>	<b>5920 km</b>	<b>7037 km</b>
Cylindre 1	0 km	4822 km	8493 km	12560 km
Cylindre 2	0 km	3851 km	5111 km	5702 km
Cylindre 3	0 km	4132 km	5920 km	7037km
Cône 1	0 km	4480 km	6411 km	7851 km
Cône 2	0 km	4447 km	5901 km	6584 km

Pour conclure, on peut dire qu'il existe d'autres cartes et d'autres manières de projeter plus perfectionnées mais qu'on n'a pas encore étudiées et notre projet pour l'instant est d'arriver à la projection de Mercator, une carte du XVIème siècle mais toujours utilisée de nos jours. On vous montre donc quelques exemples des autres cartes qui existent. On voit qu'il en existe beaucoup et on ne se demande plus, bien sûr, quelle est la plus juste, car, de fait, cela dépend de son utilisation.

## BIBLIOGRAPHIE

- R. d'Hollander, *Historique de la Loxodromie*.
- F. Joly, *La cartographie* (Ed. PUF, Que sais-je ?).
- J. Lubczanski, *Où est le trésor de Rackham Le Rouge* (Ed. CEDIC 85).
- Y. Ollivier, *Les projections cartographiques* (Quadrature n°26).
- J.-P. Petit, *Le Géométricon*. (catalogue) *Cartes et figures de la terre* (exposition Centre G. Pompidou).