Un jeu avec des Kapla

Année 2024-2025

Lucille Borusinski et Chloé Drozdz

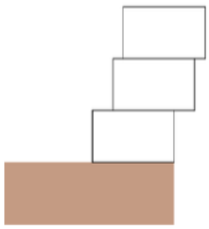
Établissement(s) : Lycée du Pays d’Aunis à Surgères (17)

Encadré·es par : Gaëtan PREVAUD

Chercheur·Chercheuse(s) : M . El Hamidi, Université de La Rochelle

1. Présentation du sujet

On dispose de Kapla tous identiques et on essaie de les disposer en équilibre depuis le bord d’une table comme représenté ci-dessous :



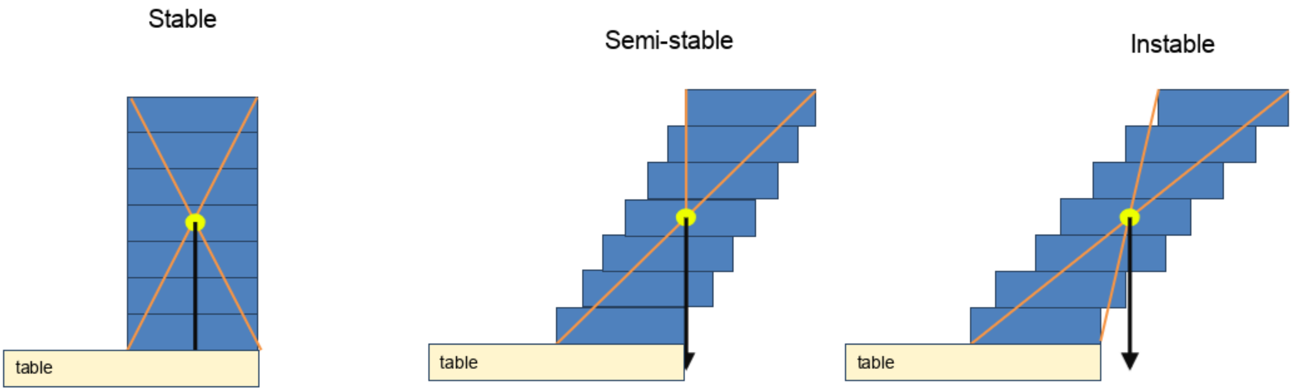
Nous en venons donc à nous poser ces questions :

1. Combien de Kapla peut-on empiler ainsi ?
2. De quelle longueur peut-on dépasser de la table ?

2. Équilibre et centre de gravité

La stabilité des Kapla dépend de leur centre de gravité. Lorsque l'ensemble des Kapla possède une symétrie, ce dernier peut être déterminé par une construction géométrique : le centre de gravité est le point d'intersection des diagonales de la figure formée par les Kapla.

On obtient les règles suivantes :



Propriété :

Si le centre de gravité est situé sur la verticale passant à l'extérieur de la table, alors la structure de Kapla s'en retrouve déséquilibrée et s'effondre (état dit « instable »).

Si le centre de gravité se retrouve sur la verticale passant par le bord de la table (état dit « semi-stable ») ou sur la verticale passant par l'intérieur de la table (état dit « stable ») alors la structure est en équilibre.

3. Combien de Kapla peut-on empiler les un sur les autres ?

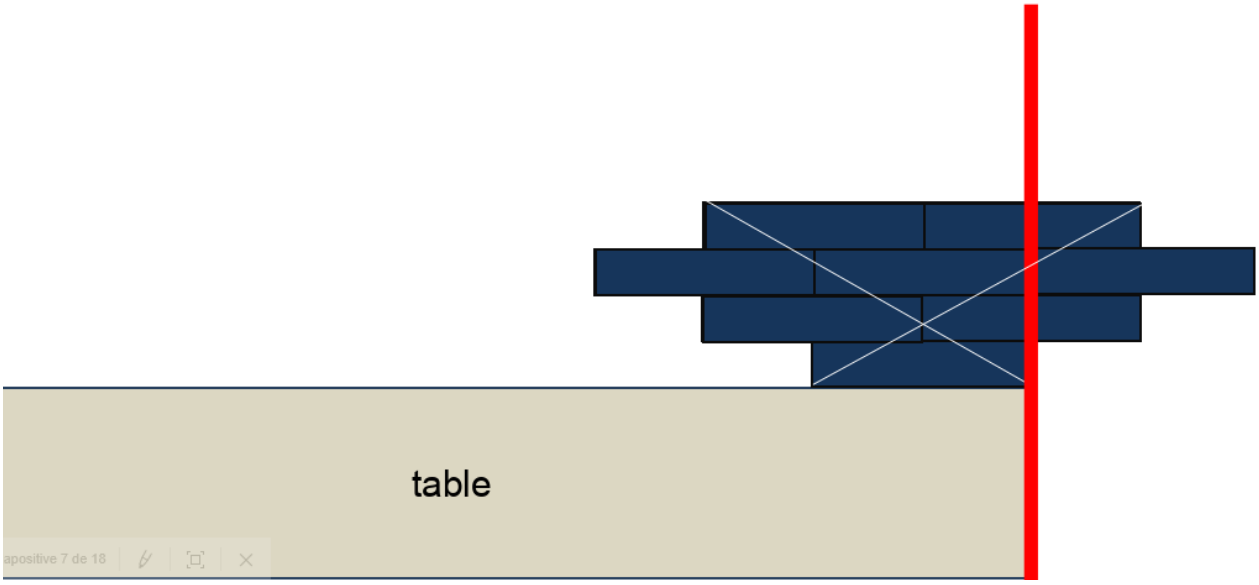
En reprenant l'explication sur le centre de gravité évoqué ci-dessus, on peut empiler à l'infini les Kapla les uns sur les autres.

4. De quelle longueur peut-on dépasser de la table ?

Nous allons distinguer deux cas possibles pour répondre à cette question :

A - Avec un contre poids

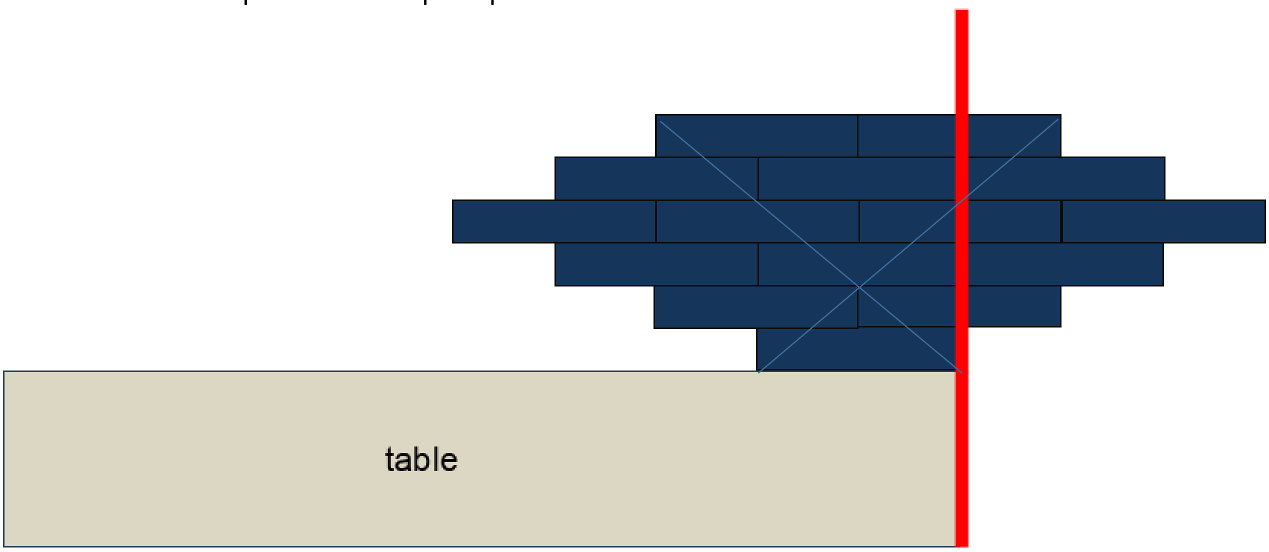
Il existe plusieurs façons d'empiler des Kapla avec un système de contre poids, en voici un exemple :



On empile les Kapla de manière à avoir un empilement symétrique. Ainsi le centre de gravité (déterminé par l'intersection des deux diagonales blanches) se situe à gauche de la verticale rouge(1). Ainsi la disposition de Kapla est en équilibre car la propriété du paragraphe 2 est vérifiée.

D'une manière générale, on place les Kapla à ce que le centre gravité (définit par l'intersection des diagonales) se situe à gauche de la ligne verticale rouge pour que l'ensemble des Kapla soit stable.

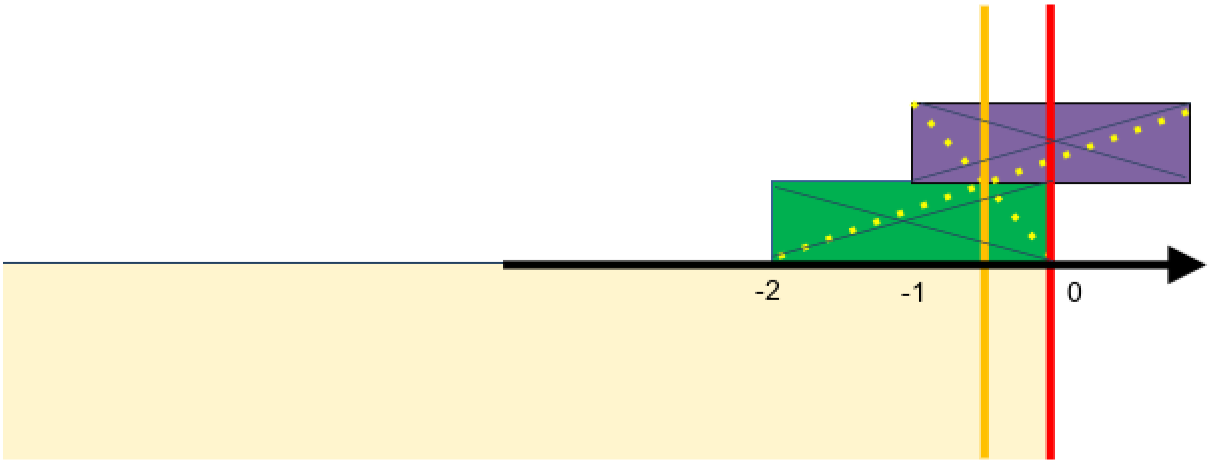
Voici un autre exemple utilisant ce principe :



B - Sans contre-poids

Cette méthode consiste à placer deux Kapla en équilibre.
Pour présenter cette méthode, sans contre poids on va voir le problème à l'envers c'est-à-dire qu'au lieu de poser les Kapla les uns sur les autres on va rajouter le nouveau Kapla en dessous de tous les autres.

Au début, on place un Kapla à moitié dans le vide. Puis on place un autre Kapla en dessus de sorte à ce que le deuxième soit un prolongement de la table.

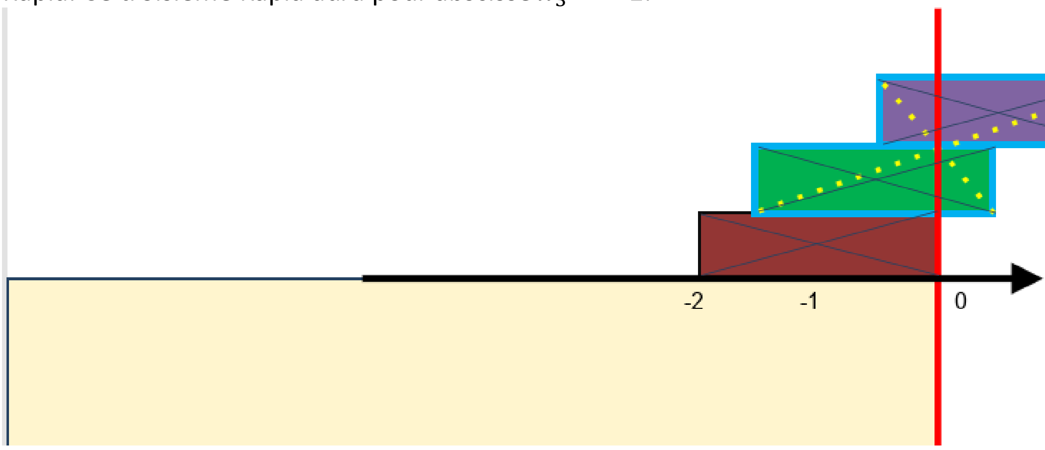


On utilise un repère dont l'origine se situe au coin droit de la table, l'axe des abscisses étant l'horizontale de la table et l'axe des ordonnées étant la verticale rouge.
On considère que chaque Kapla a une longueur de 2 unités et a un poids de 1 unité.
Dans ce repère, le centre de gravité du Kapla vert a pour abscisse $x_1 = -1$ et le centre de gravité du Kapla violet pour abscisse $x_2 = 0$. On peut alors calculer l'abscisse du centre de gravité de l'ensemble des 2 Kapla en faisant une moyenne pondérée par les masses des Kapla.

$$x_{1,2} = \frac{x_1 \times m_1 + x_2 \times m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-1 \times +0 \times 1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Ce résultat correspond au fait que le Kapla violet dépasse de $\frac{1}{2}$ longueur de Kapla le bord de la table(2).

Ensuite on déplace ces deux Kapla vers la droite jusqu'à ce que le centre de gravité de l'ensemble se situe sur la verticale rouge donc celui-ci aura pour abscisse $x_{1,2} = 0$. Puis on place un Kapla en équilibre en dessous des deux Kapla. Ce troisième Kapla aura pour abscisse $x_3 = -1$.

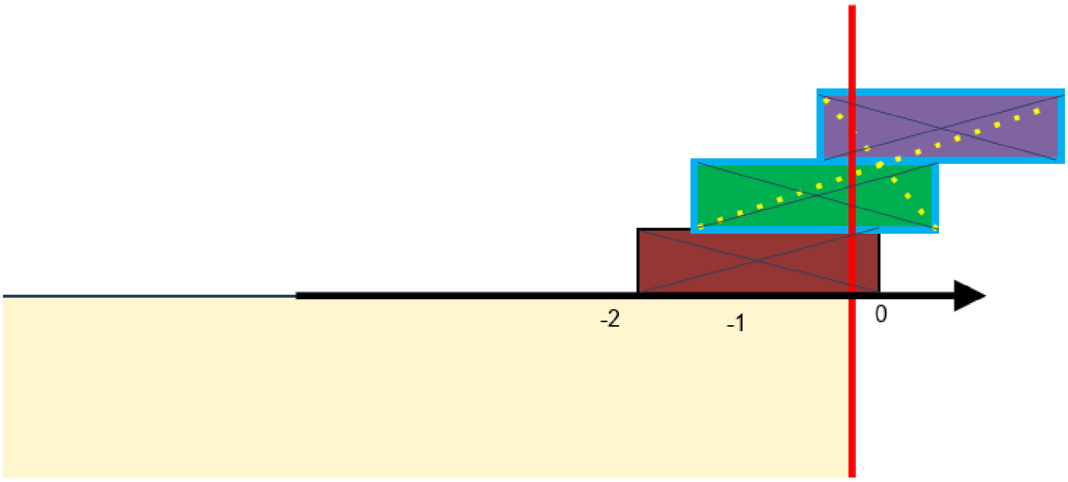


On peut alors calculer l'abscisse du centre de l'ensemble des 3 Kapla en faisant une moyenne pondérée par les masses des Kapla.

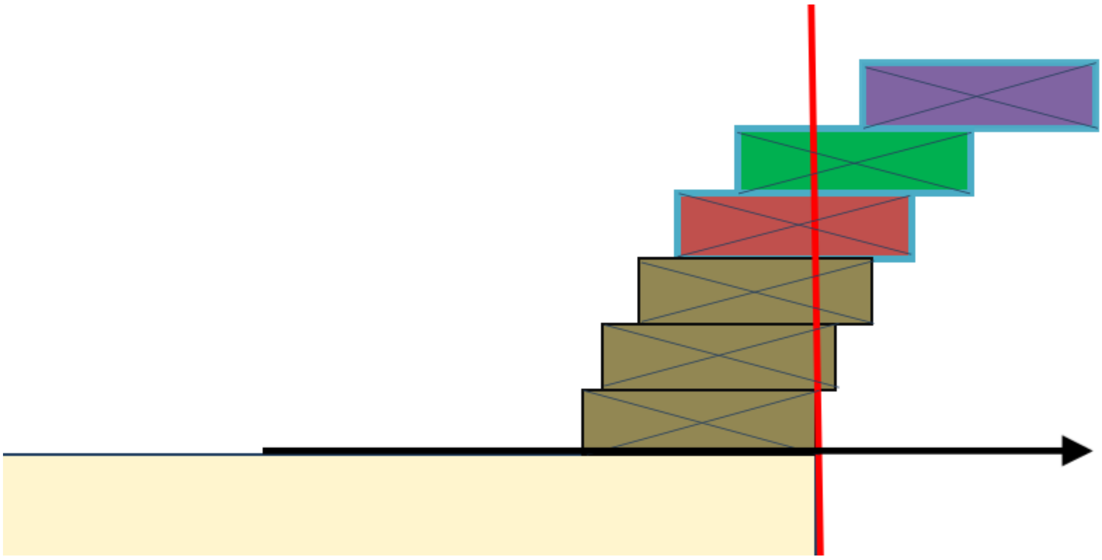
$$x_{1,2,3} = \frac{x_{1,2} \times m_{1,2} + x_3 \times m_3}{m_{1,2} + m_3} = \frac{0 \times 2 + (-1) \times 1}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

Ce résultat correspond au fait que le Kapla vert dépasse de $\frac{1}{3}$ longueur de Kapla le bord de la table. Donc au final, l'ensemble des trois Kapla dépasse de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ unité de longueur le bord de la table(3).

De nouveau, on déplace ces trois Kapla vers la droite jusqu'à ce que le centre de gravité de l'ensemble se situe la verticale rouge donc celui-ci aura pour abscisse $x_{1,2,3} = 0$.



Puis on place un Kapla en équilibre en dessous des trois Kapla. Ce quatrième Kapla aura pour abscisse $x_4 = -1$.
De la même manière on pourrait calculer l'abscisse du centre de gravité des quatre Kapla et démontrer que $x_{1,2,3,4} = -\frac{1}{4}$.
Ce résultat correspond au fait que le Kapla marron dépasse de $\frac{1}{4}$ longueur de Kapla le bord de la table. Donc au final, l'ensemble des quatre Kapla dépasse de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ unités de longueur le bord de la table.



En répétant ce processus à l'infini, on peut démontrer que l'ensemble des Kapla dépasse le bord de la table d'une longueur de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$. Kapla.
Il semblerait que cette somme soit infinie mais nous n'avons pas eu le temps d'avancer dans nos recherches à ce sujet.

5. Conclusion

Pour conclure, il existe plusieurs façons d'empiler les Kapla de manière à avoir une quantité infinie de Kapla. Dans les deux méthodes que nous avons présentées, on a pu montrer que l'on pouvait dépasser la table d'une longueur infinie de Kapla. Cependant la deuxième méthode emploie moins de Kapla pour le faire.

Notes d'édition

(1) Le centre de gravité se trouve sur la droite perpendiculaire au plan de la table, passant par le point d'intersection des deux diagonales blanches.

(2) C'est-à-dire une longueur d'une unité.

(3) L'extrémité du kapla violet, après décalage « déborde d'une longueur égale à 1+1/2 unités.