

BLEU BLANC ROUGE

Année 2017-2018

Louis Pierson, Angel Guilhem, Jordan Levy élèves de Terminale S, Ilan Moktari élève de 2^{de}

Encadrés par : Guilhem Mazet, Christine Potier, Virginie Valette, Cécile Dubois

Établissements : lycées Jean-Pierre Vernant (Pins Justaret) et Henri Matisse (Cugnaux)

Chercheur : Olivier Mazet, INSA Toulouse

Présentation du sujet

Soit un quadrillage rectangulaire (m lignes et n colonnes) de cases blanches.

Deux joueurs, un **bleu** et un **rouge**, qui à tour de rôle choisissent une case blanche. Lorsqu'ils choisissent la case (forcément blanche), ils colorient dans leur couleur toute la ligne et toute la colonne correspondantes, même si c'était déjà colorié. Le jeu s'arrête quand il n'y a plus de case blanche, et on compte les cases de chaque couleur pour attribuer le gagnant.

Le premier joueur peut-il toujours gagner ? Va-t-il toujours perdre ?

Le nombre de coups de chaque partie est-il fixe ?

Comment les valeurs m et de n vont-elles impacter la partie ?

Résultats trouvés

- 1- Le nombre de coups dans une partie est toujours égal à la plus petite dimension du quadrillage.
- 2- Le gagnant est déterminé par la parité de la plus petite dimension l du quadrillage :
 - Si l est impair, c'est le joueur qui joue en premier qui gagne
 - Si l est pair, c'est le joueur qui joue en second qui gagne

I- PRÉSENTATION DU JEU ET NOTATIONS

Soit un quadrillage rectangulaire (m lignes et n colonnes) de cases blanches.

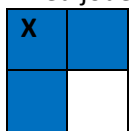
Deux joueurs, un **bleu** et un **rouge**, qui à tour de rôle choisissent une case blanche. Lorsqu'ils choisissent la case (forcément blanche), ils colorient dans leur couleur toute la ligne et toute la colonne

correspondantes, même si c'était déjà colorié. Le jeu s'arrête quand il n'y a plus de case blanche, et on compte les cases de chaque couleur pour attribuer le gagnant.

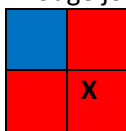
Exemples :

Grille 2x2

Bleu joue :



Rouge joue :



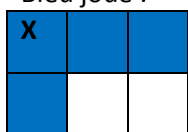
Bleu : 1

Rouge : 3

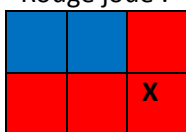
Le joueur rouge a gagné

Grille 2x3

Bleu joue :



Rouge joue :



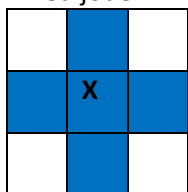
Bleu : 2

Rouge : 4

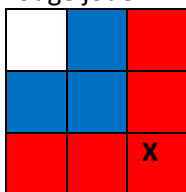
Le joueur rouge a gagné

Grille 3x3

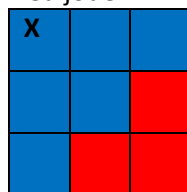
Bleu joue :



Rouge joue :



Bleu joue :



Bleu : 6

Rouge : 3

Le joueur bleu a gagné

Notations :

Pour simplifier l'étude du quadrillage, nous appellerons L la dimension du quadrillage la plus grande, et l la dimension du quadrillage la plus petite.

Par exemple, dans le deuxième exemple donné (grille 2x3) on a $L=3$ et $l=2$

Nous appellerons systématiquement le joueur qui joue en premier le « joueur Bleu » (**B**) et le joueur qui joue en second « joueur Rouge » (**R**).

Enfin, pour une partie se déroulant dans un quadrillage de dimensions $L \times l$ et se composant d'un certain nombre de coups joués, nous noterons :

- B_p le score de B au coup p
- R_p le score de R au coup p

Par exemple, dans le deuxième exemple, (grille 3x2) nous avons $B_1=4$ et $R_1=0$ puis $B_2=2$ et $R_2=4$

II- DÉROULEMENT DE LA PARTIE

Dans un premier temps, on détermine le nombre de points **marqués** par B à chaque coup. Puis on additionnera tous les points marqués entre les coups 1 et p pour avoir son **score** au coup p .

A- Nombre de points marqués par B au coup p ($p \in \mathbb{E}$)

Remarque :

B jouant en premier, il cochera une case pour p impair, donc le nombre de points marqués lors d'un coup impair sera positif. Par contre, pour les coups pairs, ce sera R qui cochera une case, donc B « marquera » un nombre de points négatif, correspondant au nombre de cases bleues qui deviendront rouges.

Au coup 1, le joueur B joue dans une grille vierge, donc il marque le nombre de points correspondant une rangée plus une colonne, et on enlève 1 car la case qu'il a cochée ne doit être comptée qu'une fois.
Score de B au coup 1 : $L+I-1$

Au coup 2, le joueur R coche une case blanche. Toutes les cases de la ligne et de la colonne correspondantes deviendront rouges. Parmi elles, il y aura deux cases bleues (une dans la ligne, l'autre dans la colonne). Le joueur B perd donc deux cases.
Score de B au coup 2 : -2

Au coup 3, le joueur B joue à nouveau : il coche une case blanche. Toutes les cases de la ligne et de la colonne correspondantes deviendront bleues. Parmi elles, il y a des cases qui sont déjà bleues. Comme le joueur B a joué une fois auparavant, le nombre de cases déjà bleues est exactement 2.
Score de B au coup 3 : $L+I-1-2$

D'une manière générale, lorsqu'une case blanche est cochée (que ce soit par B ou par R), la ligne et la colonne correspondantes contiennent $L+I-1$ cases. Et cette ligne et colonne vont « recouvrir » un certain nombre de cases déjà bleues. **Ce nombre de cases déjà bleues est égal au nombre de fois où B a joué, multiplié par 2.**

Comme B joue aux coups impairs, on va exprimer p en fonction de sa parité : $p=2k$ ou $p=2k+1$ par exemple. Par extension de ce qui a été observé, nous avons donc :

Coup p	nombre de coups joués par B	Points marqués par B
$p=2k-1$	$k-1$	$L+I-1-2(k-1)$
$p=2k$	k	$-2k$
$p=2k+1$	k	$L+I-1-2k$

B- Score de B au coup p ($p \in \mathbb{E}$)

Théorème 1: pour tout entier strictement positif p :

- Si p est pair $p=2k$ $B_p = B_{2k} = \frac{p(L+1-p)}{2}$
- Si p est impair $p=2k+1$ $B_p = B_{2k+1} = \frac{(p+1)(L+1-p)}{2}$

Démonstration

On veut déterminer le score de B au coup p .

Ce score sera égal à la somme algébrique des points marqués par B au cours des p coups qui ont été joués.

- Si p est pair : $p=2k$

Pour pouvoir regrouper les calculs de façon judicieuse, nous allons adopter les notations suivantes :

<i>rang du coup joué</i>	<i>forme de la notation</i>
Coup 1	rang $2 \times 1 - 1$
Coup 2	rang 2×1
Coup 3	rang $2 \times 2 - 1$
Coup de rang impair	rang $2 \times i - 1$
Coup de rang pair	rang $2 \times i$
Coup $p-1$	rang $2k-1$
Coup p	rang $2k$

Avec ces notations, nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 B_p = B_{2k} &= \sum_{i=1}^k L+1-2(i-1)-2i \\
 &= \sum_{i=1}^k L+1-4i \\
 &= k(L+1)-4 \sum_{i=1}^k i \\
 &= k(L+1)-4 \times \frac{k(k+1)}{2} \\
 &= k(L+1-2k) \text{ or } p=2k \text{ ce qui veut dire que } k = \frac{p}{2} \text{ donc} \\
 &= \frac{p}{2} (L+1-p)
 \end{aligned}$$

$$B_p = B_{2k} = \frac{p(L+1-p)}{2}$$

- Si p est impair : $p=2k+1$

Le score de B au coup $p=2k+1$ est égal au score de B au coup $2k$ auquel on ajoute le score de B au coup $2k+1$.

On a donc :

$$B_p = B_{2k} + L + l - 1 - 2k$$

$$= k(L + l - 1 - 2k) + L + l - 1 - 2k$$

$$= (k+1)(L + l - 1 - 2k) \quad \text{or } p=2k+1 \text{ donc } 2k=p-1 \text{ et } k+1 = \frac{p+1}{2}$$

$$= \frac{p+1}{2} (L + l - p)$$

$$B_p = B_{2k+1} = \frac{(p+1)(L+l-p)}{2}$$

on peut traduire le raisonnement que l'on vient de faire par la relation de récurrence suivante :

Propriété

- pour tout p pair: $B_{p+1} = B_p + L + l - 2 \times (\text{nombre de coups déjà joués par B à } p+1)$
- pour tout p impair: $B_{p+1} = B_p - 2 \times (\text{nombre de coups déjà joués par B à } p+1)$

C- Score de R au coup p ($p \in \mathbb{E}$)

Propriété : Pour tout entier strictement positif p , on a : $R_p = B_{p-1}$

Démonstration

Il est facile de constater que :

Au coup 1, B joue et marque $L + l - 1$ cases bleues, mais R ne perd rien car il n'y a aucune case rouge pour l'instant. Donc $R_1 = 0$

Au coup 2, le joueur R coche une case blanche. Il n'y a aucune case rouge pour l'instant. Toutes les cases de la ligne et de la colonne correspondantes deviendront rouges. Le joueur R gagne donc $L + l - 1$ cases, et on a donc

$$R_2 = L + l - 1 = B_1$$

Comme le procédé de coloration des cases sur la ligne et la colonne correspondantes à la case cochée est le même pour B ou pour R, on a, pour le reste des coups joués, la relation : $R_p = B_{p-1}$

On déduit de ce résultat :

Théorème 2 : pour tout entier strictement positif p :

- Si p est pair $p=2k$ $R_p = R_{2k} = \frac{p(L+l+1-p)}{2}$

- Si p est impair $p=2k+1$ $R_p=R_{2k+1}=\frac{(p-1)(L+l-p)}{2}$

Démonstration

- Si p est pair : $p=2k$

On a $R_p=B_{p-1}=B_{2k-1}$

or B_{2k-1} est égal à B_{2k} auquel on enlève le nombre de cases « marquées » au coup $2k$

Comme vu dans le tableau du paragraphe A, ce nombre de cases marquées par B au coup $2k$ vaut $-2k$

On a donc :

On sait que pour p pair, $B_p=\frac{p(L+l-1-p)}{2}$ et $R_p=\frac{p(L+l+1-p)}{2}$

$$B_{2k-1}=B_{2k}-(-2k)=\frac{p(L+l-1-p)}{2}+2k=\frac{p(L+l+1-p)}{2} \quad (\text{avec } p=2k) \text{ d'où } R_p=R_{2k}=\frac{p(L+l+1-p)}{2}$$

- Si p est impair : $p=2k+1$

On a $R_p=B_{p-1}=B_{2k}=\frac{p(L+l-1-p)}{2}$ (d'après le paragraphe B)

Ici $p=2k+1$ donc $2k=p-1$ et $k=\frac{p-1}{2}$ d'où :

$$B_{2k}=\frac{(p-1)(L+l-p)}{2} \quad \text{d'où } R_p=R_{2k+1}=\frac{(p-1)(L+l-p)}{2}$$

III- FIN DE LA PARTIE

A- Nombre de coups par partie

La partie s'achève lorsqu'il n'y a plus de cases blanches sur le quadrillage. A chaque coup joué, une colonne et une ligne deviennent colorés et ce jusqu'à la fin de la partie. Or lorsque soit toutes les colonnes soit toutes les lignes sont coloriées il n'y a plus de cases blanches. Une partie dure donc un nombre de coups égal à la plus petite dimension du quadrillage, c'est à dire l .

D'où :

Théorème 3 Le nombre de coups par partie est égal à la plus petite dimension du quadrillage, l .

B- Qui est le gagnant ?

Dans cette partie, nous cherchons à calculer le score des deux joueurs B et R à la fin de la partie et l'écart de score entre eux.

On rappelle la notation : la grille a pour dimension $L \times l$ où l est la plus petite dimension et L la plus grande dimension de la grille.

Théorème 4 : Le gagnant de la partie est déterminé par la plus petite dimension l du quadrillage :

- Si l est pair le joueur R gagne la partie avec l points de plus que B
- Si l est impair, le joueur B gagne la partie avec L points de plus que R

Démonstration

- Lorsque la plus petite dimension du quadrillage l est paire:

On sait que pour p pair, $B_p = \frac{p(l+l-1-p)}{2}$ et $R_p = \frac{p(l+l+1-p)}{2}$

Le score final de B est $B_l = \frac{l(l+l-1-l)}{2} = \frac{l(l-1)}{2}$

et le score final de R est $R_p = \frac{l(l+l+1-p)}{2} = \frac{l(l+1)}{2} > B_l$

C'est donc le joueur R qui gagne avec un écart de: $\frac{l(l+1)}{2} - \frac{l(l-1)}{2} = \frac{2l}{2} = l$

- Lorsque la plus petite dimension du quadrillage l est impaire:

On sait que pour p impair, $B_p = \frac{(p+1)(l+l-p)}{2}$ et $R_p = \frac{(p-1)(l+l-p)}{2}$

Le score final de B est $B_l = \frac{(l+1)(l+l-l)}{2} = \frac{l(l+1)}{2}$

et le score final de R est $R_l = \frac{(l-1)(l+l-l)}{2} = \frac{l(l-1)}{2} < B_l$

C'est donc le joueur B qui gagne avec un écart de: $\frac{l(l+1)}{2} - \frac{l(l-1)}{2} = \frac{2l}{2} = l$

Note d'édition

Remarquons qu'il n'y a pas de jeu proprement dit puisque tous les coups joués par chaque joueur sont complètement équivalents. On peut donc choisir des cases qui donnent un jeu simplifié. Avec cette remarque pouvait on trouver le résultat plus rapidement ?