

La calculatrice aux touches magiques

Collège l'Estaque 2019-2020

Elèves : Amroune Akim, Achouri Meyril, Habib Elias élèves de 4^{ème}

Rolengo Sarah élève de 3^{ème}

Chercheur : Lionel Nguyen Van Thé, I2M Marseille

Professeurs : Sébastien Simao et Soraya Chachoua

Sujet : Une calculatrice possède trois touches supplémentaires :

- La première calcule la somme des chiffres d'un nombre.
- La seconde calcule le produit des chiffres d'un nombre.
- La troisième calcule la somme des carrés des chiffres d'un nombre.

Que se passe-t'il si on prend un nombre et qu'on appuie plusieurs fois sur une de ces touches ?

1 La somme des chiffres

Premiers essais

- $1532 \rightarrow 1 + 5 + 3 + 2 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$
- $1546910241 \rightarrow 1 + 5 + 4 + 6 + 9 + 1 + 0 + 2 + 4 + 1 = 42 \rightarrow 4 + 2 \rightarrow 6$

Propriété 1 *Quelque soit le nombre de départ choisi, après plusieurs appuis sur la touche somme, on finit toujours par tomber sur un chiffre entre 0 et 9.*

Voici nos premières remarques pour prouver cette propriété : Pour un nombre N à deux chiffres, sa somme sera inférieure à 18, à l'étape suivante la somme inférieure à 9 et on tombe sur un nombre à un chiffre.

Pour un nombre à trois chiffres sa somme sera inférieure à 9×3 soit 27. On tombe donc sur un nombre à deux chiffres qui à l'étape suivante va nous donner un nombre à un chiffre.

Démonstration

Première partie : Dès qu'un nombre a plus de deux chiffres, la somme de ses chiffres sera strictement inférieure au nombre de départ.

Si on note $s(N)$ la somme des chiffres du nombre N , on veut démontrer que : $s(N) < N$

Un nombre N à trois chiffres, va s'écrire :

$$N = 100 \times c + 10 \times d + u \text{ où } c, d \text{ et } u \text{ sont les chiffres des centaines, dizaines et unités.}$$

$$s(N) = c + d + u$$

Or $c \neq 0$, donc : $c < 100c$

De plus, on a : $d + u \leq 10d + u$ (égalité si $d=0$) donc $c + d + u < 100c + 10d + u$.

On a bien $s(N) < N$.

Pour un nombre N à k chiffres, le raisonnement est identique sur le chiffre qui correspond k -ième rang.

Deuxième partie : A chaque étape, le nombre devient strictement plus petit. Après plusieurs étapes, il va donc devenir un nombre à un chiffre. Or, quand un nombre a un chiffre sa somme est identique à lui même. Donc, le résultat ne bouge plus après appuis successifs sur la touche.

Vers quels résultats arrive-t'on ?

On s'est d'abord intéressé aux nombres formés qu'avec des 9 et aux multiples de 9.

Essais

- $99 \rightarrow 18 \rightarrow 9$
- $9\,999 \rightarrow 36 \rightarrow 9$
- $9\,999\,999 \rightarrow 63 \rightarrow 9$
- On a pris aussi d'autres nombres par exemple : $1052 \times 9 = 94689468 \rightarrow 27 \rightarrow 9$

Propriété 2 *Quand on part d'un nombre multiple de neuf, on finit par tomber sur 9.*

Démonstration

Cela nous a rappelé le critère de divisibilité par 9 qu'on a vu en cours : un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Autrement dit, quand on part d'un multiple de 9 à chaque appui sur la touche magique "somme", on obtient toujours un multiple de 9. Mais d'après la première propriété, on finit par tomber sur un nombre à un chiffre qui doit être multiple de 9 donc cela ne peut être que 9.

Pour les autres cas, on a regardé des nombres consécutifs (1, 2, 3, 4, ..., 35), et on s'est aperçu que les résultats finaux revenaient cycliquement tous les neuf nombres.

Propriété 3 *Pour tout nombre non divisible par 9, le résultat final est le reste de la division euclidienne du nombre de départ par 9.*

Démonstration

Pour cela, on a remarqué que les puissances de 10 peuvent toujours s'écrire comme somme d'un multiple de 9 et de 1. En effet :

$$\begin{aligned}10^2 &= 99 + 1 \\10^3 &= 999 + 1 \\10^4 &= 9999 + 1 \\10^k &= 99999\dots9 + 1\end{aligned}$$

Dans l'écriture de N en base 10 : $N = a_k \times 10^k + \dots + a_0$

On peut remplacer chaque puissance de 10 par un multiple de 9 et en utilisant la formule de la simple distributivité pour chaque puissance de dix, on a donc :

$$N = \text{multiple de } 9 + (a_k + \dots + a_0)$$

Autrement dit $N = \text{multiple de } 9 + s(N)$.

Ainsi N et $s(N)$ ont le même reste dans la division euclidienne par 9 .

On peut comme tout l'heure, conclure que le résultat final va avoir le même reste que N dans la division euclidienne par 9.

De plus, le quotient va être nul car sinon le résultat sera supérieur à 10.

2 Produit des chiffres

Premiers essais

- $23 \rightarrow 2 \times 3 = 6$
- $623 \rightarrow 6 \times 2 \times 3 = 36 \rightarrow 3 \times 6 = 18 \rightarrow 8$
- $302 \rightarrow 3 \times 0 \times 2 = 0$
- $1111111111 \rightarrow 1$
- $10^n \rightarrow 0$

Propriété 4 *Quelque soit le nombre de départ choisi, après plusieurs appuis sur la touche "produit", on finit toujours par tomber sur un chiffre entre 0 et 9.*

Démonstration

On va procéder comme pour la somme des chiffres et d'abord démontrer que : dès qu'un nombre a plus de deux chiffres, le produit de ses chiffres sera strictement inférieur au nombre de départ. Notons $p(N)$ le produit des chiffres de N . Essayons d'abord de le démontrer pour un nombre à trois chiffres.

$$N = c \times 100 + d \times 10 + u \text{ et } P(N) = c \times d \times u$$

Or d et u sont inférieurs ou égaux à 9 donc : $p(N) \leq 81c$

Donc $p(N) < 100c$ soit $p(N) < N$.

Pour un nombre N à k chiffres, le raisonnement est identique. Tous les chiffres étant inférieurs ou égaux à 9, on peut démontrer que $p(N) \leq a_k \times 10^k$ et conclure de la même façon.

Par contre, il est très difficile de prévoir le résultat que l'on va obtenir. D'ailleurs, dès qu'il y a un zéro ou un cinq et un deux dans l'écriture en base dix de N alors $p(N) = 0$.

On ne sait pas en combien d'étapes la suite se stabilise.

3 Somme des carrés des chiffres

Premiers essais

- $25 \rightarrow 2 \times 2 + 5 \times 5 = 29 \rightarrow 4 + 81 = 85 \rightarrow 64 + 25 = \mathbf{89} \rightarrow 64 + 81 = 145 \rightarrow 1 + 16 + 25 = 42 \rightarrow 16 + 4 = 20 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 1 + 36 = 37 \rightarrow 9 + 49 = 58 \rightarrow 25 + 64 \rightarrow \mathbf{89}$
On obtient ici un cycle : dans un premier temps les résultats augmentent puis diminuent mais surtout au bout d'un certain nombre d'étapes, les mêmes nombres réapparaissent.
- $1 \rightarrow 1$
- $10^n \rightarrow 1$ Ici, pour n'importe quelle puissance de 10, on obtient toujours 1.

Comme les calculs ici étaient bien plus long, on a réalisé [un programme sur Scratch](#) (cliquez sur le lien) On l'a testé sur les 100 premiers nombres. Ce qui nous permet d'établir la conjecture suivante :

Conjecture *Après plusieurs appuis sur cette touche, on peut tomber :*

- *Soit sur un cycle : $4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4$*
- *Soit sur 1.*

En effet, on s'est aperçu que dès qu'on prend un nombre à plus de deux chiffres, la somme des carrés est plus petite que le nombre de départ.

On finit par retomber sur un nombre entre 1 et 100. Nous n'avons toutefois pas eu le temps de le démontrer.