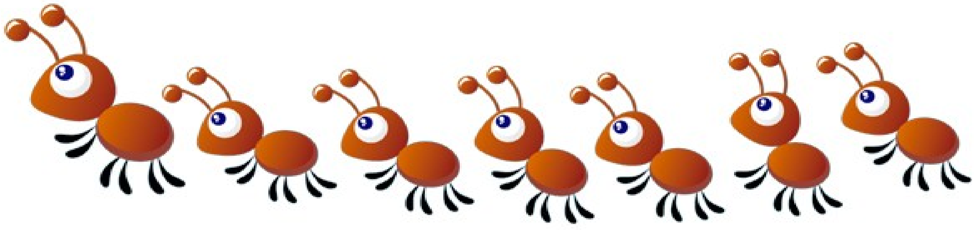
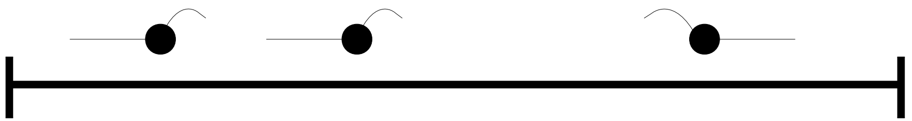
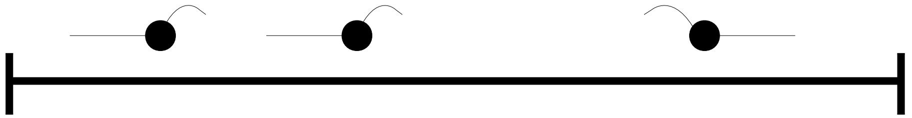
COLONIE DE FOURMIS



On dispose sur un segment un certain nombre de fourmis, orientées vers un côté ou l’autre.

- Le segment mesure 1 mètre.
- Les fourmis se déplacent à la vitesse d’un mètre par minute.





Lorsque deux fourmis se rencontrent, elles changent de sens et continuent leur route. Lorsqu’elle arrivent au bord du segment, elles tombent.

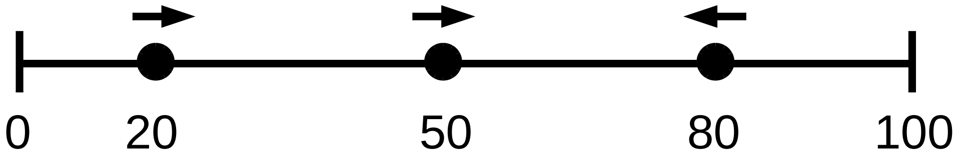
Les fourmis vont-elles toutes tomber et , si oui, au bout de combien de temps ?

Sommaire

- Exemples
- Conjecture
- Démonstration sur des exemples
- Conclusion

Exemples

Les fourmis allant à la même vitesse, lorsqu'elles vont l'une vers l'autre, elles se rencontrent au milieu du segment qu'elles forment.



Nous avons gradué le segment sur lequel elles se déplacent de 0 à 100 pour pouvoir repérer leur position et exprimer les distances parcourues.

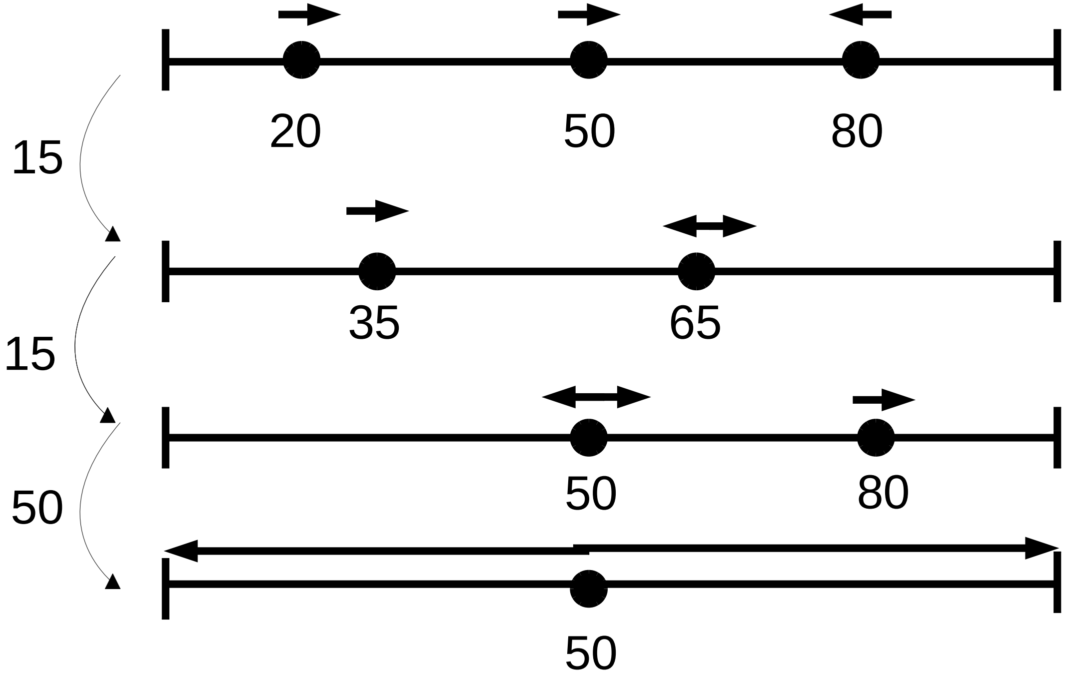
Une fourmi sera représentée par un point et le sens de son déplacement sera indiquée par une flèche.

Pour calculer le temps qu’une fourmi met pour tomber :

La fourmi va à une vitesse de 1m par minute c’est à dire 1m en 60s.

On multiplie donc la distance (en m) par 60 pour avoir le temps de parcours (en s).

Exemple 1



$$\frac{80-50}{2}=15$$

50 + 15 = 65
80 – 15 = 65
20 + 15 = 35

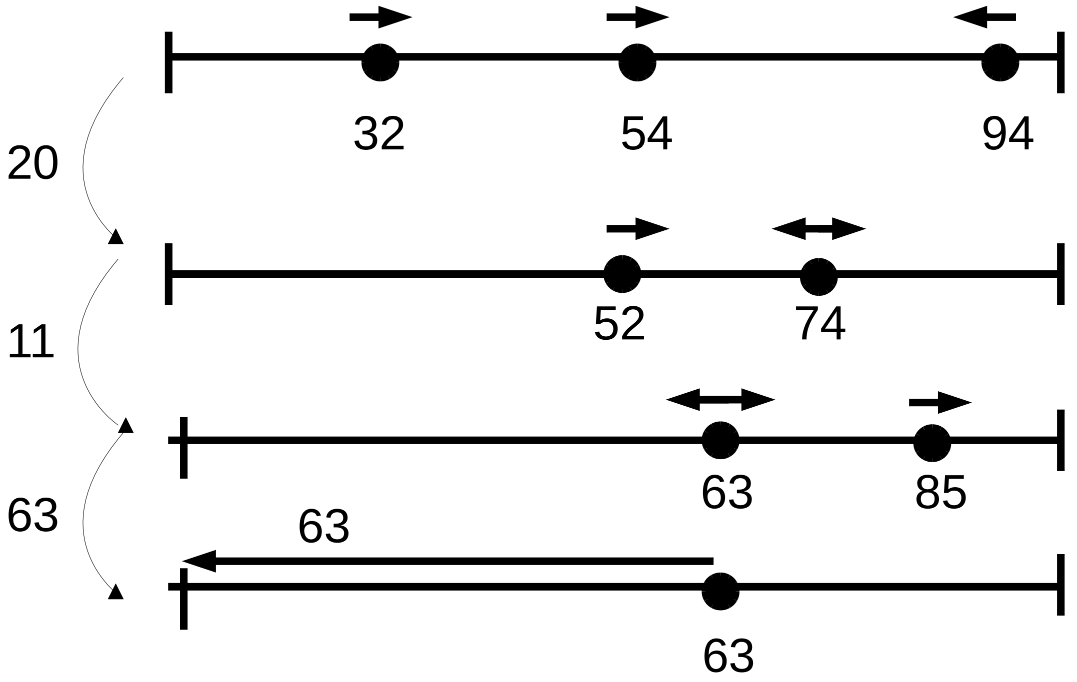
$$\frac{65-35}{2}=15$$

35 + 15 = 50
65 – 15 = 50

100 – 50 = 50

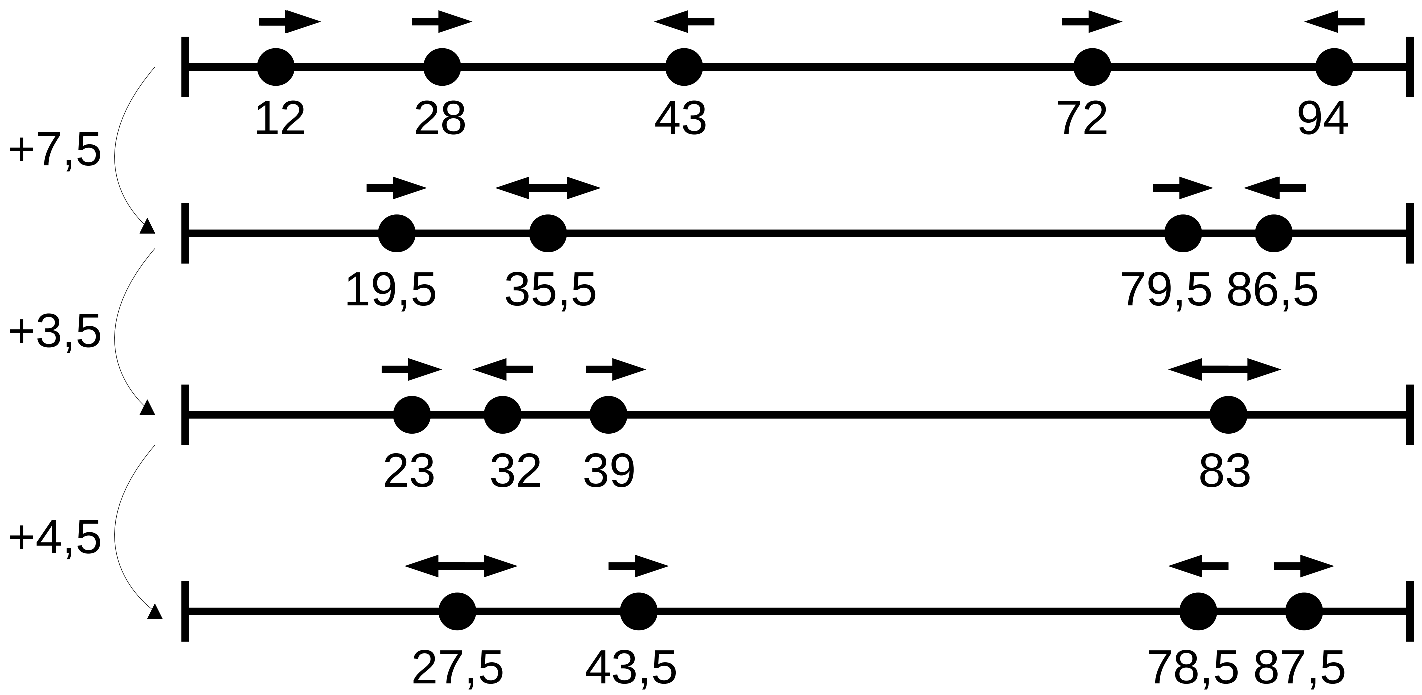
La dernière fourmi qui tombe parcourt : 15 + 15 + 50 = 80 cm
Elles sont toutes tombées au bout de 48 s $(0{,}8\times 60)$.

Exemple 2



La dernière fourmi qui tombe parcourt : 20 + 11 + 63 = 94 cm
Elles sont toutes tombées au bout de 56,4s ($0{,}94 \times 60$).

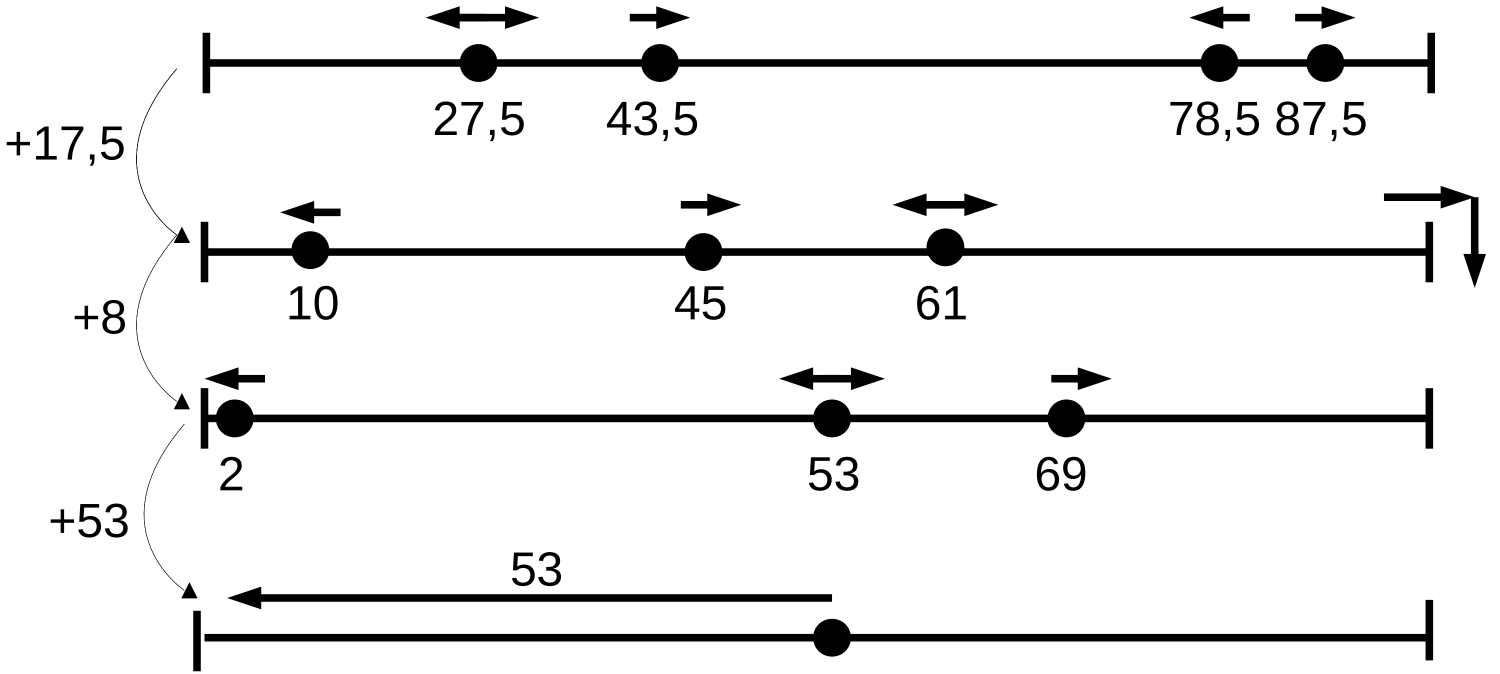
Exemple 3



$$\frac{48-23}{2}=7{,}5$$

$$\frac{86{,}5-79{,}5}{2}=3{,}5$$

$$\frac{32-23}{2}=4{,}5$$



$$\frac{43,5-27,5}{2}=17,5$$

$$\frac{61-45}{2}=8$$

La dernière fourmi qui tombe parcourt :

7,5 + 3,5 + 4,5 + 17,5 + 8 + 53 = 94 cm

Elles sont toutes tombées au bout de 56,4s ($0,94\times 60$).

Conjecture

Il faut , dans tous les exemples qu’on a pu prendre, toujours moins d’une minute pour que toutes les fourmis soient tombées.

Il semble que toutes les fourmis soient tombées en un temps qui correspond à la distance parcourue par une fourmis qui serait à la place de celle la plus éloignée du bord, au départ, et qui ne serait pas arrêtée.

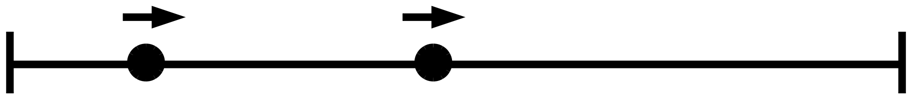
Ex 1 : la plus éloignée est celle à 20 (ou 80) ; la distance totale parcourue à la fin est de 80 cm.

Ex 2 : la plus éloignée est celle à 94 ; la distance totale parcourue à la fin est de 94 cm.

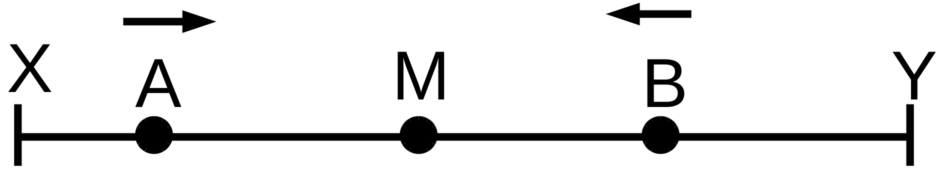
Ex 3 : la plus éloignée est celle à 94 ; la distance totale parcourue à la fin est de 94 cm.

Une démonstration dans le cas de 2 fourmis

- Si les deux fourmis vont dans le même sens, notre conjecture est démontrée de façon évidente, la fourmi qui se trouve derrière l’autre tombera en dernier.



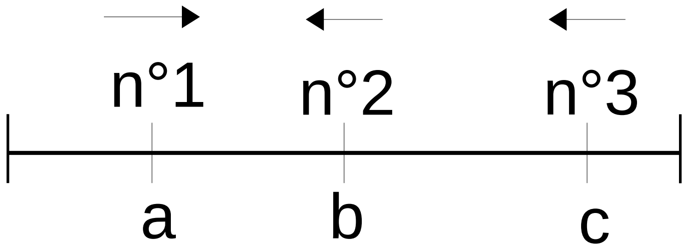
- Si les deux fourmis ne vont pas dans le même sens :
Soit A et B les deux fourmis et M leur point de rencontre, milieu de [AB] : on a donc AM = MB.



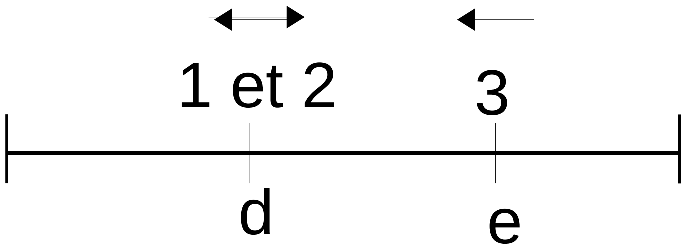
Avant de tomber, la fourmi A parcourt : AM + MX = BM + MX = BX
La fourmi B parcourt : BM + MY = AM + MY = AY
Si AY> BX, la fourmi B tombe en dernier en ayant parcouru la distance AY.
Si AY< BX la fourmi A tombe en dernier en ayant parcouru la distance BX.
Notre conjecture est bien vraie pour 2 fourmis.

Une démonstration sur un exemple avec 3 fourmis

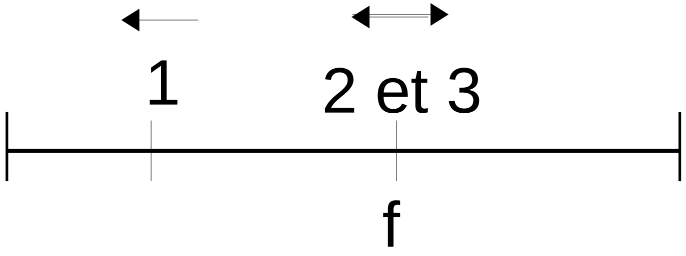
On a : a<b<c et la fourmi n°3 est le plus loin du bord vers lequel elle est tournée : c>100 – a .



$$d = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \qquad e = c - \frac{b-a}{2}$$



La fourmi 1 ne peut tomber en dernier, elle tombera forcément avant la 2 donc on l’enlève.



$$f = d + \frac{e-d}{2} = \frac{d+e}{2} = \frac{\frac{a+\cancel{b}}{2} + c - \frac{\cancel{b}-a}{2}}{2} = \frac{a+c}{2}$$

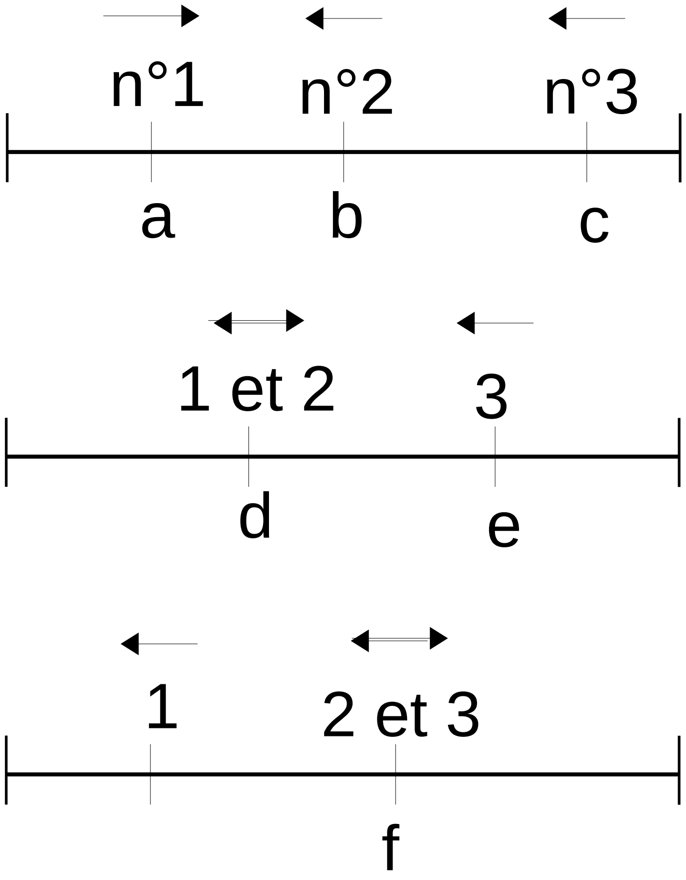
On a f > 50 c’est donc la n°2 qui tombera en dernier.
La distance totale parcourue par cette fourmi est :

$$\frac{b-a}{2}+\frac{e-d}{2}+f$$

$$=\frac{b-a}{2}+\frac{c-\frac{b-\cancel{a}}{2}-\frac{\cancel{a}+b}{2}}{2}+\frac{a+c}{2}$$

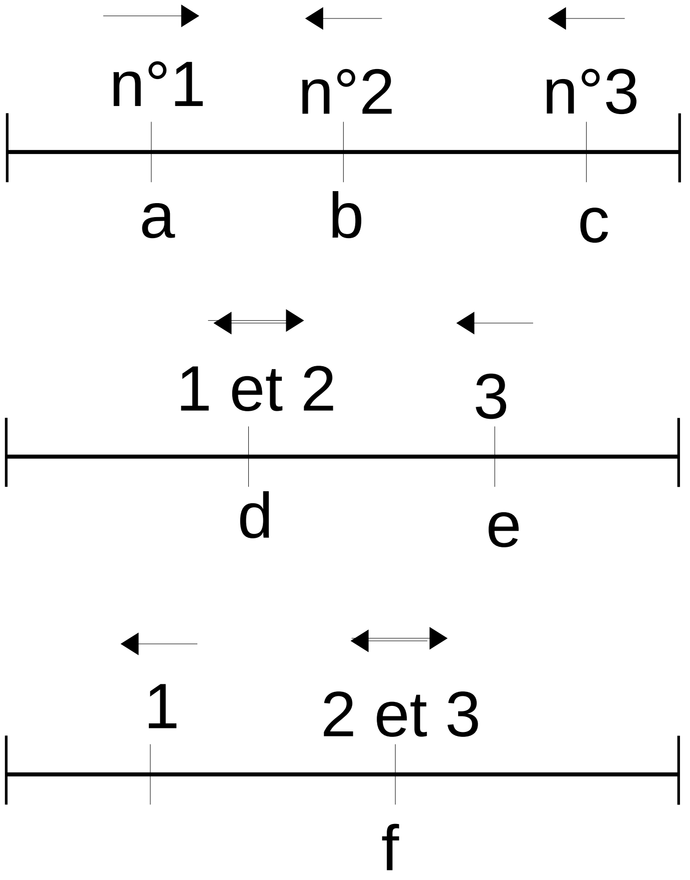
$$=\frac{b-a+c-b+a+c}{2}$$

$$=c$$



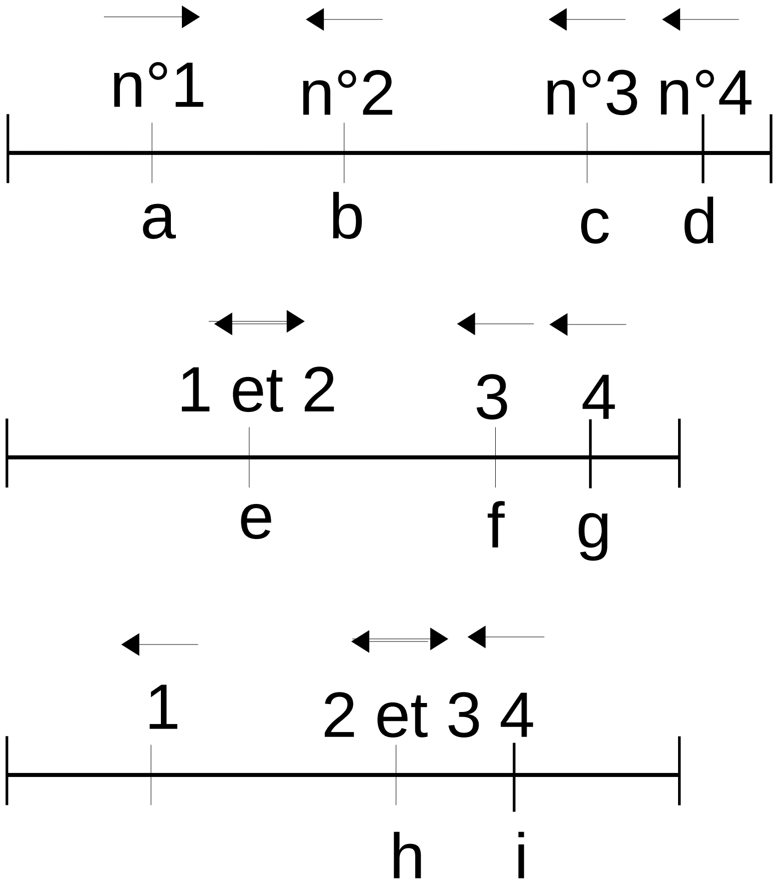
Le temps est donc bien égal à c et inférieur à 1 minute.

Le temps est donc bien inférieur
à 1 minute et correspond au temps
que mettrait la fourmi 3 pour tomber
Si elle n’était pas arrêtée.



Une démonstration sur un exemple avec 4 fourmis

On a : a<b<c<d et la fourmi n°4 est le plus loin du bord vers lequel elle est tournée : d>100 – a .



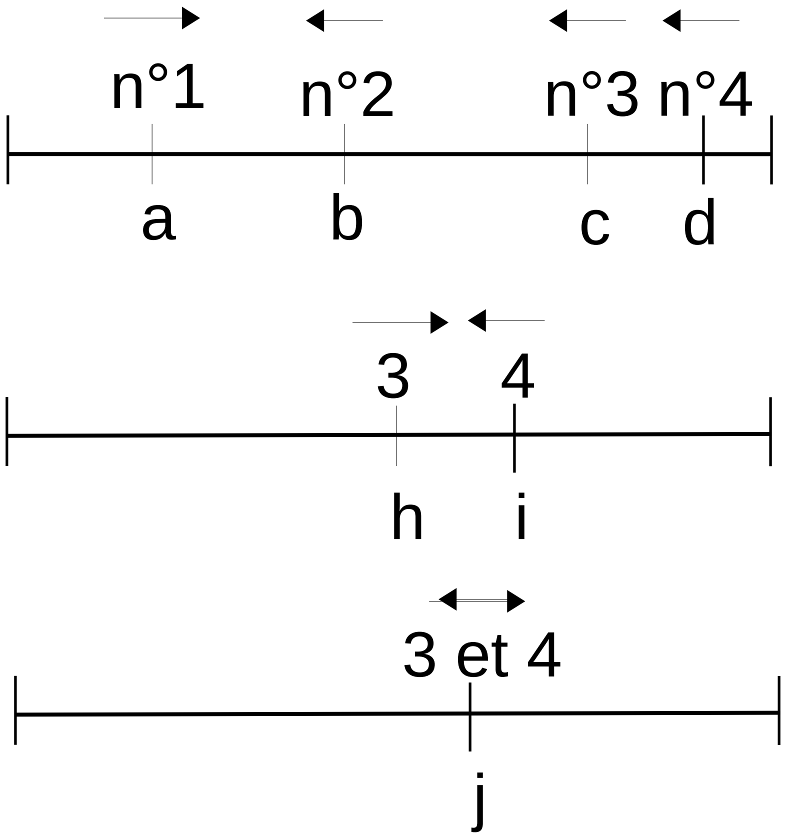
$$e = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$f = c - \frac{b-a}{2} \qquad g = d - \frac{b-a}{2}$$

$$h = e + \frac{f-e}{2} \qquad i = g - \frac{f-e}{2}$$

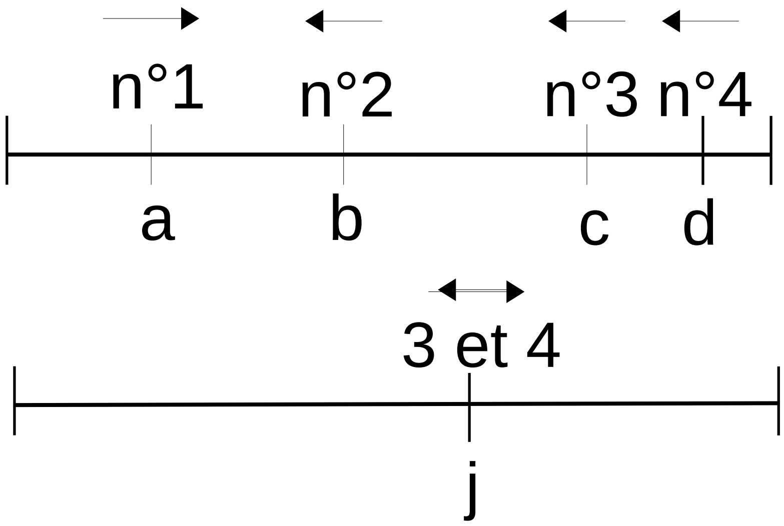
Les fourmis 1 et 2 tomberont forcément avant la 3 donc on les enlève.

$$j = h + \frac{i-h}{2} = \frac{h+i}{2}$$



j > 50 c’est donc la n°3 qui tombera en dernier.
La distance totale parcourue par cette fourmi est :

$$\frac{b-a}{2}+\frac{f-e}{2}+\frac{i-h}{2}+j$$



On simplifie :

$$f-e=c-\frac{b-a}{2}-\frac{a+b}{2}=c-b$$

$$i-h=g-\frac{f-e}{2}-e-\frac{f-e}{2}=g-f=d-\frac{b-a}{2}-c+\frac{b-a}{2}=d-c$$

$$j=\frac{h+i}{2}=\frac{e+g}{2}=\frac{a+d}{2}$$

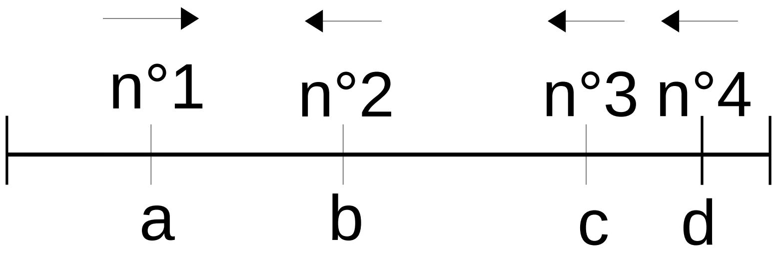
La distance totale parcourue
par cette fourmi est :

$$\frac{b-a}{2}+\frac{f-e}{2}+\frac{i-h}{2}+j$$

$$=\frac{b-a}{2}+\frac{c-b}{2}+\frac{d-c}{2}+\frac{a+d}{2}$$

$$=\frac{b-a}{2}+\frac{c-b}{2}+\frac{d-c}{2}+\frac{a+d}{2}$$

$$=d$$



Le temps est donc bien inférieur
à 1 minute et correspond au temps
que mettrait la fourmi 4 pour tomber
Si elle n’était pas arrêtée.

Remarque

Lorsque deux fourmis se rencontrent, cela a le même effet que si elles se passaient au travers et continuaient leur route.

On prends deux fourmis, une rouge et une bleue, et on les place de manière à ce qu’elle se rencontre

Elles avancent, se rencontrent et repartent.

La fourmi rouge est identique à la fourmi bleue, on peut donc les intervertir, cela ne changera pas le temps.

Nous répétons donc cette action à chaque rencontre de fourmis.

Conclusion

Pour trouver le temps que mettront toutes les fourmis pour tomber, il faut prendre la fourmi la plus éloignée du côté où elle est orientée et multiplier sa distance avec le bord en m par 60.

Fin