

# Coloriage du cube

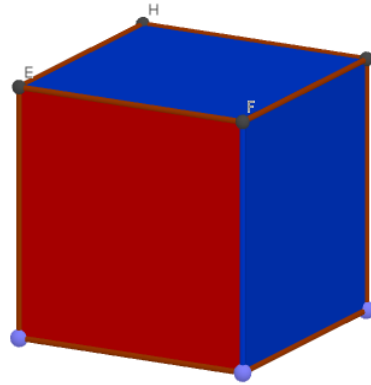
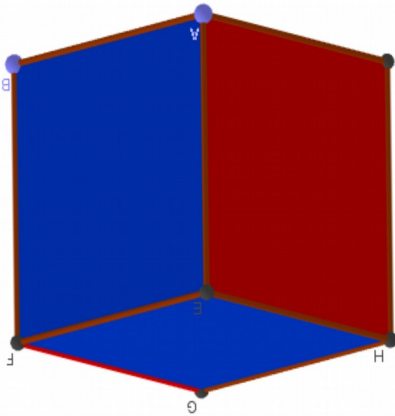
On se donne des faces bleues et des  
faces rouges.

Combien de cubes différents peut-on  
constituer ?

Et si on augmente le nombre de  
couleurs ?

Remarque :

En faisant tourner le cube sur lui-même, on obtient des cubes identiques.



# Sommaire

## 1) Le cube

- 1 couleur
- 2 couleurs
- 3 couleurs
- 6 couleurs

## 2) Le dodécaèdre

1 - Le cube

# 1 couleur

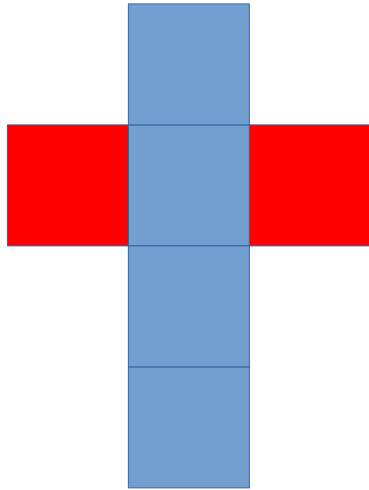
De façon évidente, il n'y a qu'**une façon de colorier un cube** avec une couleur puisque toutes les faces sont de la même couleur.

## 2 couleurs

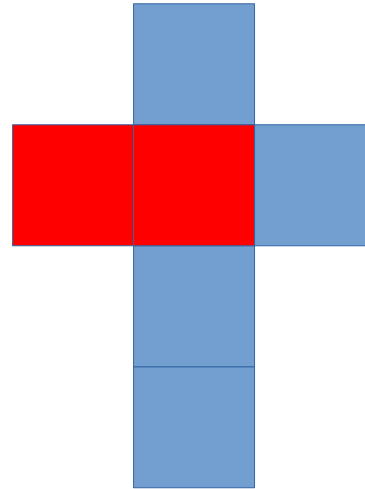
- Si 1 seule face est rouge :  
**un seul cube possible**, peu importe où se trouve la face rouge.

# 2 couleurs

- Si 2 faces sont rouges, on a deux cas :

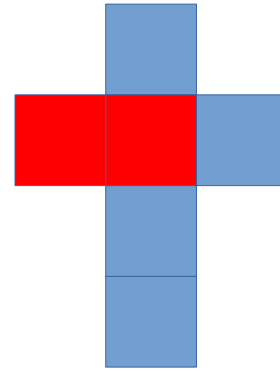
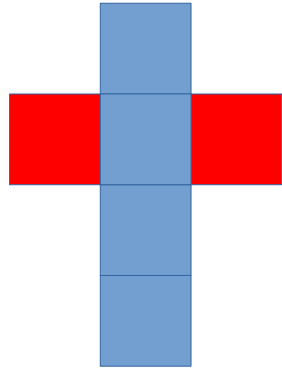


Les deux faces  
rouges sont opposées.



Les deux faces rouges  
sont adjacentes.

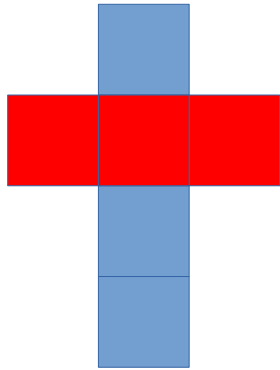




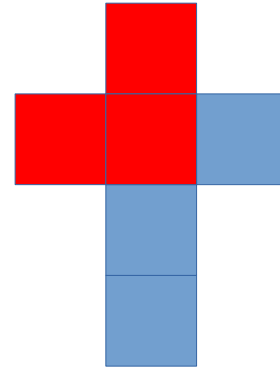
Quelque soit la façon dont on place les faces rouges, on obtient un seul cube pour chaque cas.

**Donc il y a seulement 2 possibilités pour construire ce cube.**

- Si 3 faces sont rouges, il y a encore deux cas :



Les faces rouges sont « alignées ».



Les deux faces rouges forment un coin du cube.

Ici encore, quelque soit la façon dont on place les faces rouges, on obtient un seul cube pour chaque cas.

**Donc il y a seulement 2 possibilités pour construire ce cube.**

- Si 4 faces sont rouges, il y en a 2 de bleues et on est revenu au même raisonnement que pour 2 rouges → il y a 2 possibilités.

- De même si 5 faces sont rouges, 1 est bleue donc 1 seule possibilité.

- 6 faces rouges → impossible, il nous faut ici deux couleurs.

# Conclusion

Nombre de faces rouges	Nombre de cubes différents
1	1
2	2
3	2
4	2
5	1

Il y a donc 8 façons de colorier un cube avec 2 couleurs.

# 3 couleurs

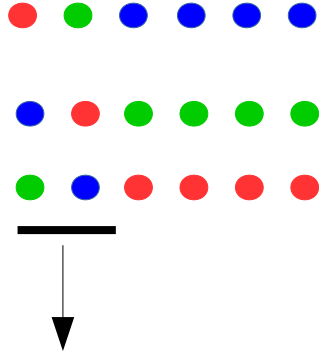
Prenons par exemple Rouge/bleu/vert

1) 2 couleurs ne sont présentes chacune que sur une seule face, les 4 autres faces sont de la même couleur.

3 cas sont possibles :



The diagram shows three rows of colored dots representing different color distributions on a cube's faces. The first row has one red dot, one green dot, and four blue dots. The second row has one blue dot, one red dot, and four green dots. The third row has one green dot, one blue dot, and four red dots.

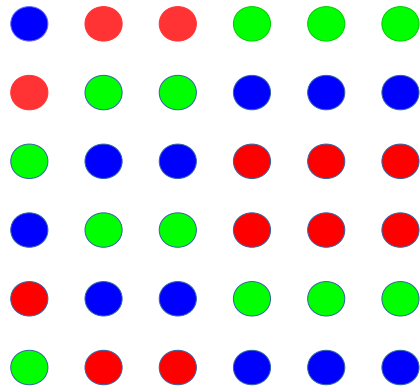


Pour les 2 faces de couleurs différentes présentes sur une seule face, on a 2 cas de position : elles sont soit sur des faces opposées soit sur des faces adjacentes.

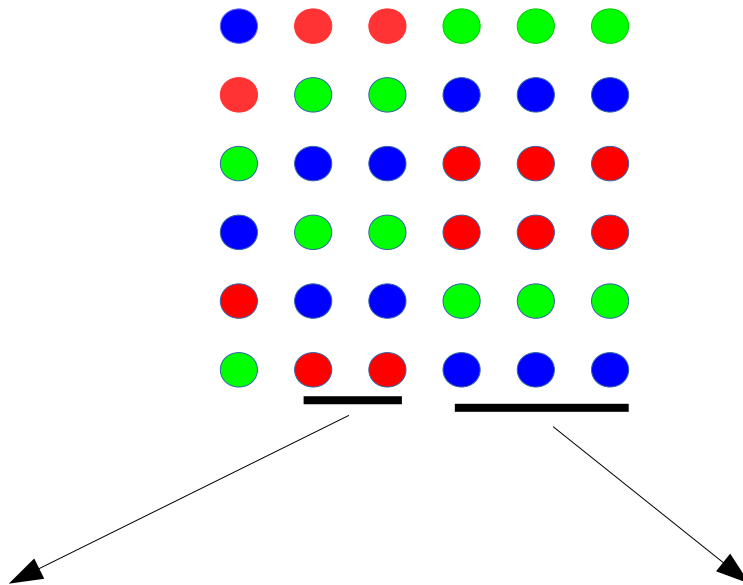
Ce qui nous donne 2 possibilités pour chaque cas donc en tout : **6 possibilités de coloriages.**

2) 1 couleur est sur une seule face et la deuxième couleur sur 2 faces, les 3 autres faces sont coloriées avec la 3<sup>e</sup> couleur.

Voici les cas possibles :



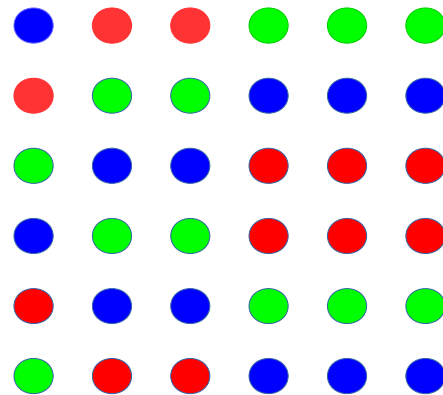




Pour les 2 faces  
d'une couleur 2  
possibilités. Faces  
opposées ou  
adjacentes.

Pour les 3 faces d'une  
couleur, 2 possibilités en  
coin ou en bande.

Si les 3 mêmes couleurs sont :



En bande  
(6 cas)

Les 2 faces de même couleur  
Sont opposées (1 cas)

Les 2 faces de même couleurs  
Sont adjacentes (1 cas)

en coin  
(6 cas)

Les 2 faces  
de la même couleur sont forcément  
Adjacentes (1 cas)

**Au total :  $6 \times 1 + 6 \times 1 + 6 = 18$  possibilités**

3) Il nous reste à traiter le cas où les 3 couleurs sont présentes chacune sur 2 faces chacune :





→ 1 couleur est sur 2 faces opposées et les autres sont sur des faces adjacentes

→ 3 cas

→ Les 3 couleurs sont sur des faces opposées.

→ 1 cas

→ Les 3 couleurs sont sur des faces adjacentes.

→ 2 cas

**Au total : 6 possibilités**

# Conclusion

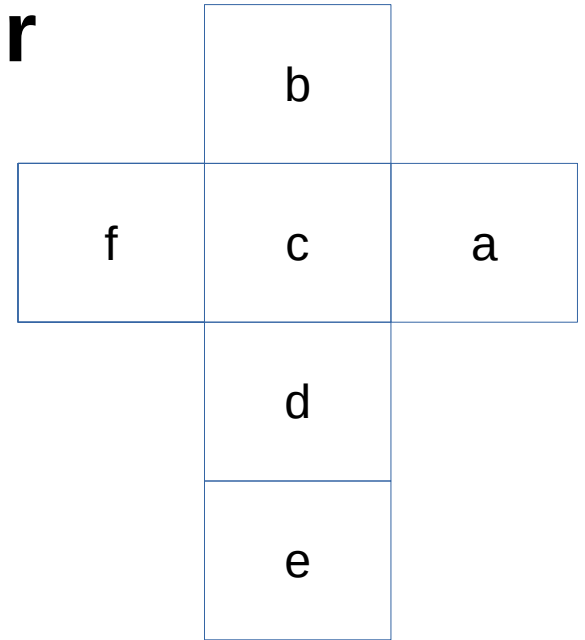
Nombre de faces par couleur	possibilité
1 / 1 / 4	6
1 / 2 / 3	18
2 / 2 / 2	6

Il y a donc 30 façons différentes de colorier un cube avec 3 couleurs.

# 6 couleurs

**Méthode 1 : on raisonne à partir du cube lui même.**

On repère chaque face par une lettre.



On choisit une couleur et on la met en a.

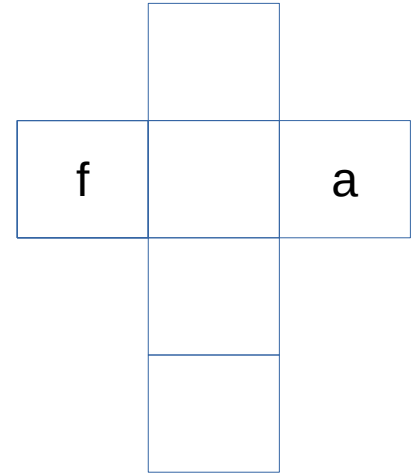
On met une autre couleur en f : 5 cas.

Sur la bande il reste les couleurs,  
appelons les 1 / 2 / 3 / 4, à placer.

Si on ne tient pas compte des cubes identiques, il y a 24 façons  
de mettre le 1 / 2 / 3 / 4 :

4 façons pour la 1<sup>ère</sup> case, 3 façons pour la 2<sup>ème</sup> et 2 façons pour la  
3<sup>ème</sup> et 1 façon pour la dernière.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$



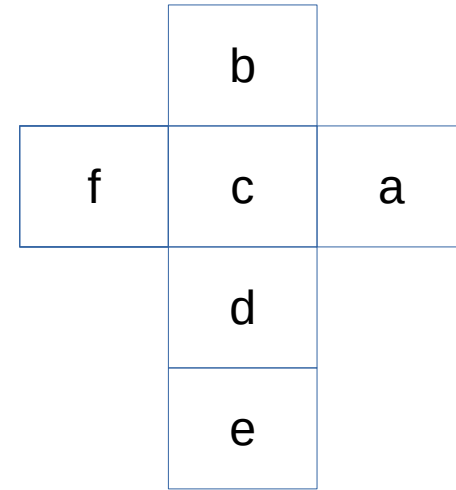
a et f sont fixés (5 cas).

Regardons les cubes identiques.

En b/c/d/e, on place les couleurs 1/2/3/4.

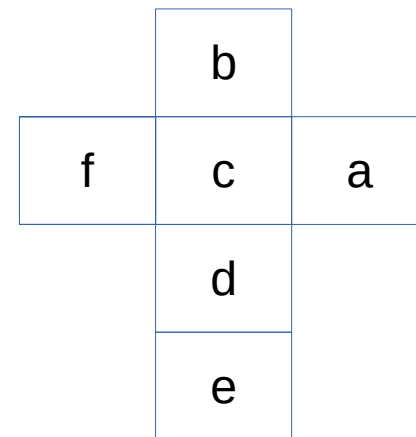
**6 Cas :**

1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	4	4
3	4	2	4	2	3
4	3	4	2	3	2



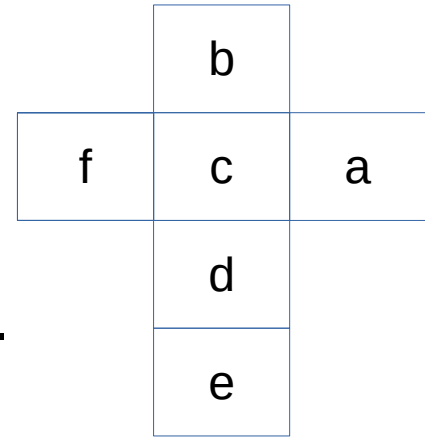


1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	4	4
3	4	2	4	2	3
4	3	4	2	3	2



Toutes les autres combinaisons reviennent à celles-ci : ce sont des permutations.

Exemple : 4 2 1 3 c'est la même que : 1 3 4 2



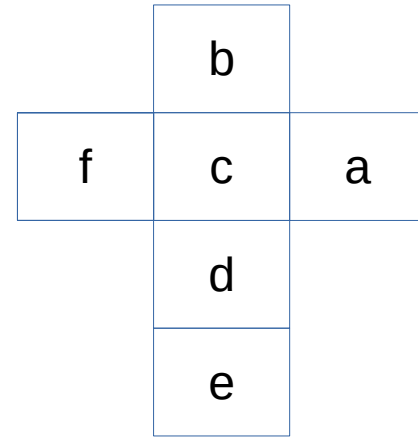
Permuter les couleurs en b c d e revient en fait à faire une rotation du cube autour d'un axe qui passerait par les centres des faces a et f ; faire cette rotation nous donne des cubes identiques.

On a donc en tout :  $6 \times 5 = 30$  cubes différents.

### **Conclusion méthode 1**

Il y a donc 30 façons de colorier un cube avec 6 couleurs.

## Méthode 2 : on compte les patrons puis les cubes

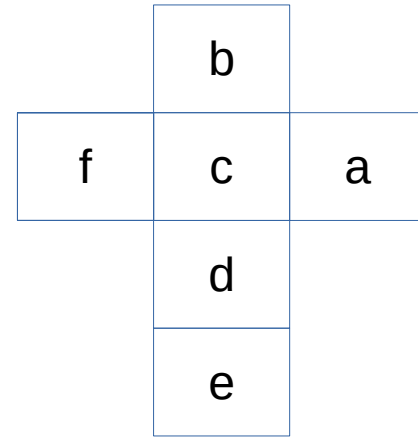


On compte les façons de colorier ce patron :

- pour la face a on peut mettre 6 couleurs
  - pour la face b on ne peut plus mettre que 5 couleurs
- et ainsi de suite jusqu'à f où nous ne pourrions mettre plus qu'une couleur.

Le calcul du nombre total de coloriages pour le patron est donc  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Mais plusieurs patrons donnent le même cube !



A partir d'un cube colorié, quand on le déplie pour en trouver le patron, il y a 6 façons de choisir la couleur qui se retrouvera en a. La couleur de la face f sera alors imposée (face opposée sur le cube).

Ensuite, il y aura 4 façons différentes de déplier la bande centrale b, c, d, e, selon la couleur choisie pour la face b.

Il y a donc  $6 \times 4 = 24$  patrons différents pour le même cube.

On a trouvé 720 façons différentes de colorier notre patron.  
Mais il y a 24 patrons coloriés différents pour un même cube..

$$720 : 24 = 30$$

Il n'y a donc que 30 cubes différents.

## **Conclusion méthode 2**

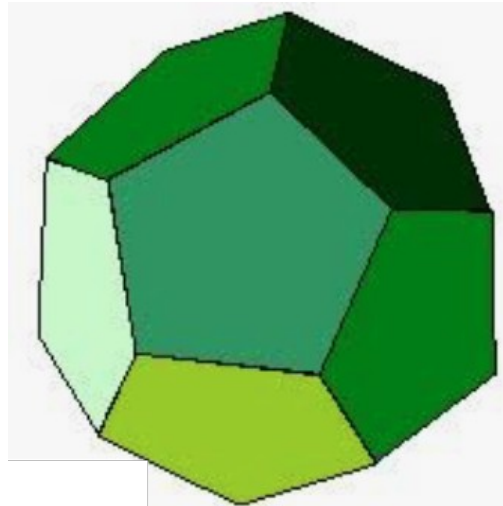
Il y a donc 30 façons de colorier un cube avec 6 couleurs.

## **Extension**

Combien y a t-il de façons de colorier un dodécaèdre avec 12 couleurs ?

# Le dodécaèdre

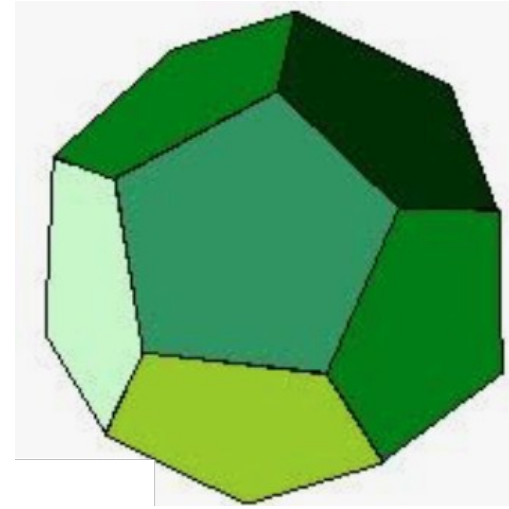
Polyèdre à 12 faces qui sont des pentagones réguliers.



Nous procédons comme le cube.

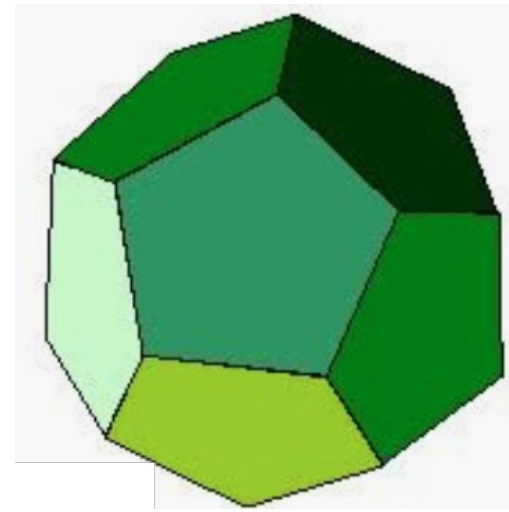
Le nombre de possibilités, si on ne compte pas ceux qui vont être identiques est :

$$\begin{aligned} 12! &= 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 11 \times 12 \\ &= 479\,001\,600 \end{aligned}$$





A ce nombre, on va enlever tous ceux obtenu par rotation : on divise par 5 (le nombre de rotations donnant les même solide autour d'un axe donné) multiplié par le nombre de faces sur lesquelles on peut faire cette rotation : 12.



Ce qui nous donnerait comme nombre de dodécaèdres différents avec 12 couleurs :

$$479\ 001\ 600 : 60 = \mathbf{7\ 983\ 360}$$

**FIN**