Disposer des couples

Année 2018 - 2019

Juliette MORIN et Elsa ROTH, élèves de 1ere S
Encadrées par Stéphanie CHANCEREL et Anne DUVAL
Établissement : Lycée Douanier Rousseau (Laval)
Chercheurs : François DUCROT et Théo JAMIN (Université d'Angers)

(1)

Sujet

Cinq couples sont invités à une soirée dansante. A chaque morceau de musique, les dix personnes danseront simultanément, chaque fois un homme avec une femme, et sans répéter deux fois la même configuration. De plus, il est convenu que deux époux ne danseront jamais ensemble. Combien de morceaux de musique pourra-t-on passer pendant la soirée ? Comment résoudre ce problème pour n couples ?

Annonce des résultats

Soit D_n le nombre de morceaux de musique qu'on pourra passer durant une soirée avec n couples.

Notations :
- Chaque couple est numéroté.
- Le duo formé par l'homme x et la femme y est noté : $Hx \ - Fy$

Exemple traité :
Pour $n = 5$, 44 morceaux de musiques seront possibles.

Théorème 1 :
Soit un entier naturel tel que $n > 2$.

$$D_n \ = \ (D_{n-2} \ + \ D_{n-1})\,(n-1)$$

Théorème 2 :
Soit un entier naturel tel que $n \geq 2$.

$$\begin{cases} D_n = (-1)^n + nD_{n-1} \\ D_1 = 0 \end{cases}$$

Théorème 3 :
Soit n un entier naturel tel que n ≥ 2.

$$D_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1) Première approche : « cycle »

Tout d'abord, nous avons ajouté une consigne et cherché à compter le nombre de danses pour lesquelles chaque invité ne danse jamais deux fois avec le même partenaire. On obtient pour 5 couples un ensemble de quatre danses : un cycle, où personne ne danse deux fois avec la même personne.
Seulement, selon la consigne de départ, tous les invités ne doivent pas obligatoirement permuter de cette manière à chaque danse : un simple échange de 2 partenaires suffit pour créer une nouvelle configuration. Nous avons alors cherché à dénombrer, à partir de la première danse de ce cycle, toutes les manières de faire permuter 2 hommes.
10 échanges de ce type sont possibles :

1-2 ; 1-3 ; 1-4- ; 1-5 ; 2-3 ; 2-4 ; 2-5 ; 3-4 ; 3-5 ; 4-5

Ces échanges sont applicables aux quatre danses du cycle, on obtiendrait ainsi 40 danses. Toutefois, certaines de ces possibilités ne respectent pas l'énoncé du problème : deux numéros identiques ne peuvent pas se retrouver ensemble. Par exemple, si l'on échange $H1$ et $H2$, seules les danses 2 et 3 de ce cycle sont finalement possibles. Après avoir retranché toutes les danses impossibles, on obtiendrait ainsi 20 possibilités.

Mais on peut également échanger les partenaires de 3 puis de 4 hommes sur les 5. Il faudrait alors de nouveau retrancher toutes les danses impossibles à la main, puis vérifier qu'aucune danse ne se recoupe… Nous nous sommes vite rendu compte que cette manière de procéder n'était pas adaptée : nous n'avions pas la certitude d'avoir répertorié l'ensemble des possibilités.

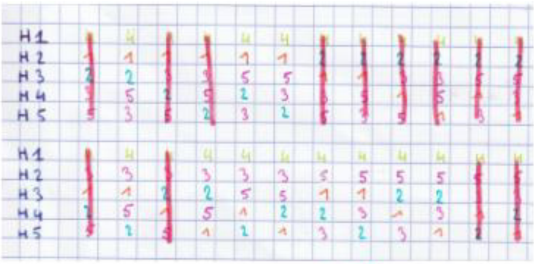
2) Ordonner les possibilités

Nous avons alors tenté une approche différente : sans se préoccuper de la consigne des couples de même numéro, nous avons dénombré toutes les possibilités pour lesquelles $H1$ est avec $F2$, puis avec $F3$, $F4$ et $F5$. Nous savions d'emblée que tous les cas commençant par $H1$-$F1$ seraient par définition impossibles.

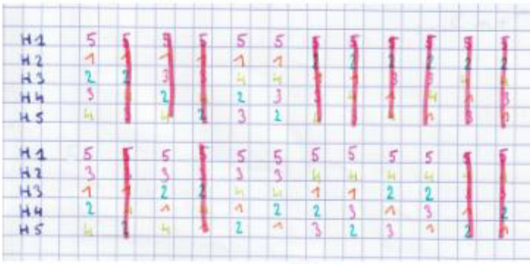
On obtient ainsi 4 ensembles de 24 possibilités chacun. Il suffit ensuite d'écarter à la main les configurations impossibles (ici barrées au rouge). Pour chaque ensemble, 11 danses ont été retenues. Nous sommes donc arrivées à une première réponse : 44 danses sont possibles selon les règles énoncées par ce problème.

Possibilités H1-F2 = 11

Possibilités H1-F3 = 11



Possibilités H1-F4 = 11



Possibilités H1-F5 = 11

3) Données pour différents nombres de couples

Nous avons alors cherché à établir une formule qui donnerait le nombre de danses possibles en fonction du nombre de couples présents.
Pour cela, nous avons comparé le nombre de danses possibles pour 2, 3, 4 et 6 couples en utilisant la même méthode.

Nombre de couples n	Nombre de danses sans la contrainte : $n!$	Nombre de danses avec la contrainte	Différence
2	2	1	1
3	6	2	4
4	24	9	15
5	120	44	76
6	720	265	445

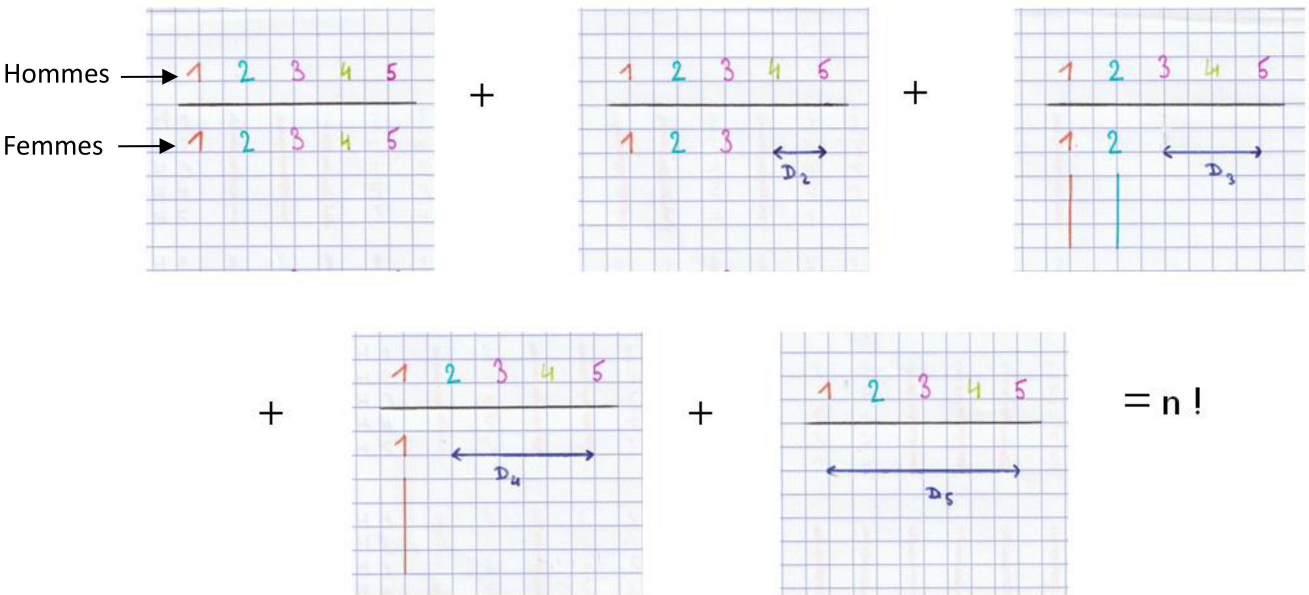
On constate que quel que soit le nombre n de couples, le nombre de danses possibles sans la contrainte est égal à $n!$. De fait, le premier homme peut danser avec n femmes, le second avec $n-1$ femmes… et le dernier homme n'aura plus qu'une seule possibilité. Soit : $n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

4) Organiser les impossibilités : déterminer les configurations à retrancher à $n!$

Théorème 1 :
Soit n un entier naturel tel que $n > 2$. On a $D_n = (D_{n-2} + D_{n-1})(n-1)$.

Preuve (2)

Cas de $n = 5$:



Afin de répertorier toutes les possibilités, on place sur ce schéma les hommes, et face à eux les femmes. On peut ainsi visualiser d'une manière différente $n!$: Pour 5 couples, on a le cas où les 5 femmes dansent avec leur mari, puis celui où seulement 3 des femmes sont fixées en face de leur mari et où les deux autres échangent. Si 2 femmes sont fixées, il faut que les 3 autres permutent ; si une seule femme est fixée, il s'agit des 4 autres. Pour chaque cas, on multipliera par le nombre de manières de choisir 1, 2 ou 3 femmes parmi

5, noté $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$ et $\binom{5}{3}$.
Enfin, il y a le cas où les 5 femmes permutent sans qu'aucune d'elles ne soit en face de son mari ; en bref, la réponse à notre problème.

$$D_5 = 5! - \left(D_4 \times \binom{5}{1} + D_3 \times \binom{5}{2} + D_2 \times \binom{5}{3} + 1\right)$$

Cas général :

En utilisant le même raisonnement, nous obtenons la formule suivante pour tout n ≥ 2

$$D_n = n! - \left(D_{n-1} \times \binom{n}{1} + D_{n-2} \times \binom{n}{2} + \dots + D_2 \times \binom{n}{n-2} + 1\right)$$

$$D_n = n! - 1 - \sum_{i=2}^{n-1} \left(D_i \times \binom{n}{n-i}\right).$$

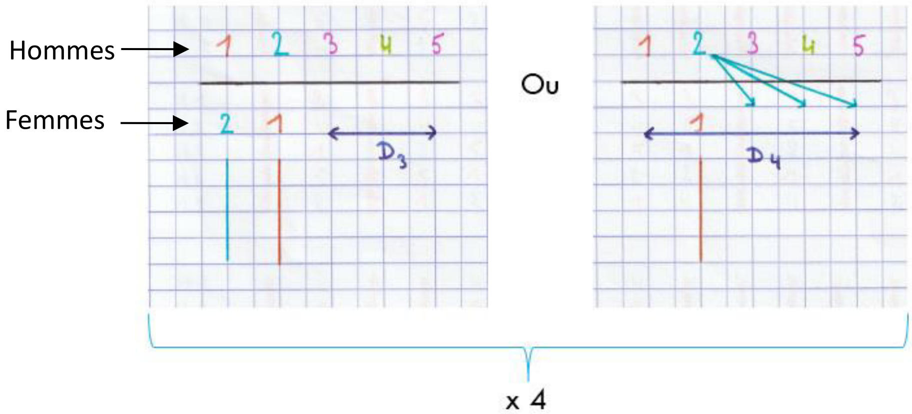
Une autre approche

Afin de trouver une formule plus simple, on peut visualiser le dérangement (3) de couples d'une autre manière :

Cas de $n = 5$:

Si l'on place $F1$ avec $H2$, deux cas sont possibles :

- $F2$ peut aller avec $H1$, on retrouve alors le dérangement des trois autres femmes (cf. schéma).
- $F2$ peut aller non pas avec $H1$ mais avec l'un des trois autres hommes. Chaque femme a alors 3 possibilités, il s'agit d'un dérangement de quatre (4).



Ces situations peuvent se reproduire avec $F3$, $F4$, et $F5$, soit 4 fois en tout.

On a donc : $D_5 = (D_3 + D_4) \times 4$.

Cas général :

$$D_n = (D_{n-2} + D_{n-1})(n-1)$$

5) Simplifier la formule

Il faut à présent trouver une formule par récurrence d'ordre 1, c'est-à-dire exprimer D_n en fonction de D_{n-1}.

Théorème 2 :
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Pour n couples présents lors de la soirée, nous pourrons passer D_n morceaux de musique en respectant les contraintes du problème avec :

$$\begin{cases} D_n = (-1)^n + nD_{n-1} \\ D_1 = 0 \end{cases}$$

Preuve :

On a $D_1 = 0,\ D_2 = 1$ et $D_3 = 3$. Pour $n > 2$,

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) = nD_{n-1} - D_{n-1} + nD_{n-2} - D_{n-2}$$

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= nD_{n-2} - D_{n-2} - D_{n-1} \\ &= -D_{n-1} + (n-1)D_{n-2} \\ &= -1 \times (D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}) \end{aligned}$$

On définit la suite (E_n) pour $n \geq 2$ par

$$\begin{cases} E_2 = 1, \\ \text{pour } n > 2,\ E_n = D_n - nD_{n-1} \end{cases}$$

Alors, pour $n > 2$,

$$E_n = -1 \times (D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}) = -E_{n-1}.$$

Or $E_2 = 1$ donc $E_n = (-1)^n$ et

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= (-1)^n \\ D_n &= (-1)^n + nD_{n-1}. \end{aligned}$$

Enfin, il faut déterminer une formule explicite pour exprimer le dérangement de n couples sans connaître celui du nombre de couples précédent.

Théorème 3 :
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Pour n couples présents lors de la soirée, nous pourrons passer D_n morceaux de musique en respectant les contraintes du problème avec :

$$D_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Preuve :
Nous considérons toujours n couples Homme-Femme invités à la soirée et dansant simultanément avec les conditions du problème. Intéressons-nous au quotient $D_n/n!$: en utilisant le théorème 2, nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{n!} &= \frac{(-1)^n + nD_{n-1}}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{D_{n-3}}{(n-3)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Lors du congrès, un professeur chercheur nous a expliqué que cette expression est proche de $1/e$ quand n devient très grand. On déduit de l'égalité précédente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$$

et donc, que pour une grande valeur de , est proche de $n!/e$.

En multipliant par $n!$, on obtient aussi la formule du théorème : $D_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

6) Bilan

Ainsi, grâce à ce problème des couples qui peut paraître simple au premier abord, nous avons eu l'opportunité de découvrir des notions mathématiques très variées, tout en approfondissant certains sujets vus en cours.

Notes d'édition

(1) Cet article fait suite à celui des élèves du collège Fernand Puech de Laval sur le même sujet.

(2) Les auteurs démontrent d'abord une formule différente. La preuve du théorème 1 se trouve au paragraphe “une autre ”approche”, un peu plus loin.

(3) En combinatoire mathématique, un *dérangement* est une permutation des éléments d'un ensemble où aucun des éléments ne se retrouve à sa place initiale. Ici, si on place chaque femme (ou chaque homme) en face de son conjoint, il s'agit de trouver le nombre de leurs dérangements.

(4) $F1$ dansant avec $H2$, si on place $F2$ en face de $H1$ et $F3$, $F4$ et $F5$ en face de leurs conjoints, les cas où $F2$ ne danse pas avec $H1$ correspondent bien aux dérangements de ces 4 dernières femmes.