Échecs et maths

Sophie RUMIN, Rachel SADJI, Laure SPIROUX
et
Pauline DEMORY, Clémence CASSE, Marie DROUHIN, Thibaut CUNY, Amélie KASPERSKI, Tesnime AHMANE

Elèves de 3eme et 4eme au *Collège Charles Peguy (Palaiseau), et élèves de 3ème au Collège Alain Fournier (Orsay)*.

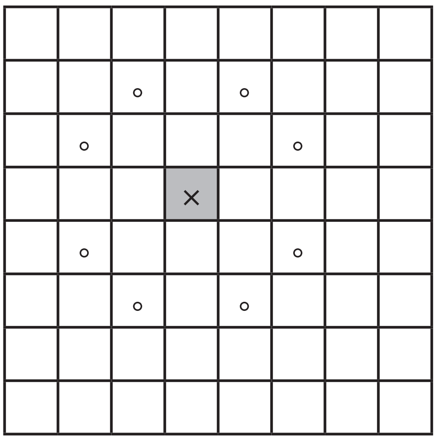
Enseignants : Mme FERRY, Mme DAMONGEOT et M. FOURNIER.

Chercheurs : Olivier COULAUD et Aurélien POIRET.

Sujet

Sur un jeu d'échec, le cavalier se déplace en L, c'est-à-dire deux cases dans une direction puis d'une case dans une direction perpendiculaire à la précédente.

Si on considère que le cavalier est représenté par la croix, les points représentent ses différents déplacements possibles :



Peut-on parcourir toutes les cases d'un échiquier 8×8 en utilisant la marche classique du cavalier du jeu d'échecs sans passer plusieurs fois par la même case ?

Mots-clés

CAVALIER, EULER, ÉCHECS, ÉCHIQUIER, CHEMIN, PARCOURS, HAMILTONIEN, GRAPHE, ALGORITHME, PROGRAMME

En commençant nos recherches, nous n'arrivions pas à trouver une solution au problème posé ; nous avons donc étudié des échiquiers d'une taille plus petite.

1) Étude d'un échiquier 3×3

Nous avons remarqué qu'il était impossible d'atteindre la case du milieu à partir des autres cases. Si on part des autres cases, il sera facile de remplir toutes celles des côtés [sur la figure, les cases sont numérotées par ordre de passage] mais pas celle du milieu, et si on part du milieu on ne pourra pas en sortir.

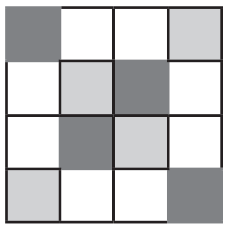
1	4	7
6		2
3	8	5

Le problème posé est donc impossible avec un échiquier 3×3.

2) Échiquier 4×4.

Après de nombreux essais, nous avons conjecturé qu'il était également *impossible de remplir un tel échiquier.* Nous l'avons ensuite prouvé de deux manières :

• Par un raisonnement.

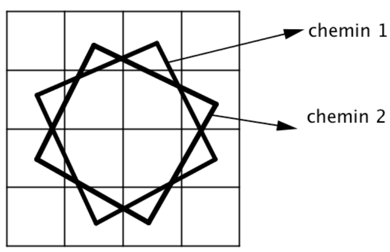


Nous avons remarqué que les cases des coins ne peuvent être desservies que par les cases du milieu. A un certain moment de notre parcours, on va forcément se retrouver [pour la première fois] dans une des 2 boucles (gris clair et gris foncé).

A ce moment, on fera probablement un coin et on ressortira par l'autre case du milieu. On aura deux choix : soit faire l'autre coin et dans ce cas on sera bloqué car on aura déjà fait les cases qui permettent de ressortir de ce coin, ou on sortira de la boucle, mais on ne pourra jamais revenir dans ce coin. [Pour cette raison]-là, il vaut mieux garder cette boucle pour la fin. On ne pourra pas ressortir du coin mais ça ne sera pas grave car on aura terminé l'échiquier.

On peut donc [en fait on est obligé de] :

– commencer par une des deux boucles.
– puis arriver à une case centrale.
– poursuivre par les cases latérales en remarquant qu'il y a deux chemins [forcés].



– terminer par la deuxième boucle et les quatre coins seront ainsi complétés.

Le problème est que pour accéder au chemin 2 à partir du chemin 1, il faut utiliser une des 4 cases centrales qui sont réservées pour la première et la dernière étapes.

Il est donc *impossible de compléter un échiquier* de 16 cases.

Numérotons les cases dans l'ordre dans lesquelles on passe et illustrons nos remarques :

	11	4	1
3		7	10
8		2	5
	6	9	

13	2	9	
8	5	12	3
	10	1	6
	7	4	11

15	4	9	6
10	7	12	3
1	14	5	8
	11	2	13

• Avec un arbre des possibilités.

Cet arbre s'est révélé immense mais nous a permis de montrer que le problème avec cet échiquier était impossible.

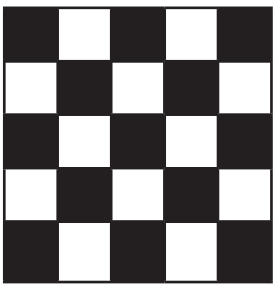
3) Échiquier 5×5.

Nous avons trouvé des solutions, en voici une :

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	25	4	21
18	23	6	11	16
7	12	17	22	5

Nous nous sommes alors demandé *s'il était possible de trouver un chemin fermé,* c'est à dire qui revient au point de départ. *La réponse est non.*

En effet : considérons notre échiquier classique avec des cases blanches et noires alternées. Lorsque le cavalier se trouve sur une case blanche, la case suivante sera noire ; les couleurs sont ainsi inversées à chaque étape.



Il y a 25 cases, 25 est impair, donc la case finale sera de la même couleur que la case de départ. Il est donc impossible de revenir sur la première case. Ce raisonnement reste valable pour tous les échiquiers qui possèdent un nombre impair de cases . Pour ces échiquiers, il n'y a donc pas de chemin fermé.

Regardons maintenant s'il est possible de partir de n'importe quelle case. Il y a 25 cases dans notre échiquier 5×5 dont ici 13 cases noires et 12 cases blanches.

Si on commence par une case noire on terminera par une case noire et on pourra [espérer] faire tout l'échiquier (on l'a vu dans notre exemple en partant d'un coin).

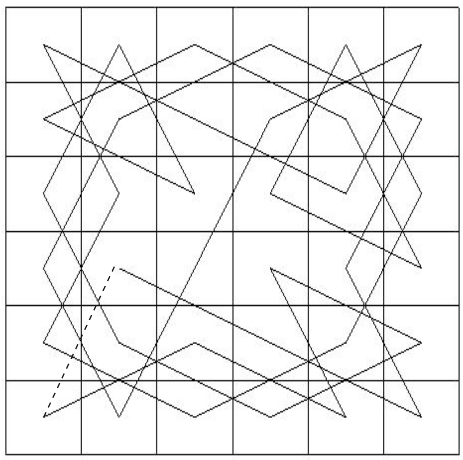
Si on commence par contre par une case blanche, on ne pourra faire que 12 cases blanches et 12 cases noires et on terminera ces 24 cases par une case noire, il restera donc une case noire et *l'échiquier ne pourra pas être terminé.*

Ce raisonnement reste valable pour tous les échiquiers qui possèdent un nombre impair de cases.

Pour l' échiquier 5×5, nous n'avons pas réussi à trouver une solution en partant de la case du milieu d'un côté ; même lorsque nous avons essayé avec un programme dont nous parlerons dans la dernière partie, la recherche n'a pas abouti. *Nous ne savons donc pas si un chemin est possible en partant d'une telle case* (qui est pourtant une case noire).

4) Échiquier 6x6

Nous avons trouvé une solution à l'aide du logiciel Scilab [voir le programme en annexe]. Il existe plusieurs solutions. Nous avons essayé de voir si l'on pouvait de la case d'arrivée rejoindre la case de départ afin de faire une boucle fermée ; nous avons réussi, voici un exemple de chemin fermé.



Cela nous démontre également qu'un chemin est possible en partant de n'importe quelle case.

5) Échiquier 8×8

Nous avons tout d'abord trouvé une solution au hasard (voir page suivante).

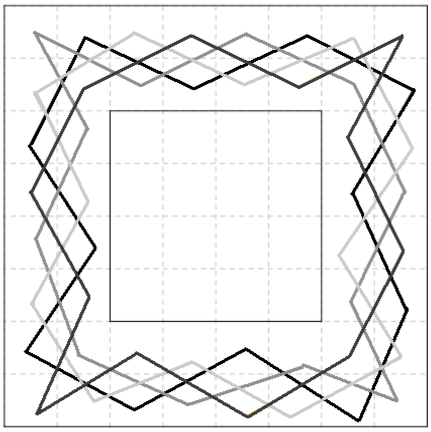
Nous avons donc essayé d'établir une stratégie pour compléter l'échiquier sans placer les nombres au hasard.

Nous avons remarqué que dans un échiquier 8x8, nous pouvions faire quatre boucles permettant de compléter toutes les cases en bordure.

Ainsi nous avons pu séparer l'échiquier en deux parties : un carré 4×4 central et une zone en bordure.

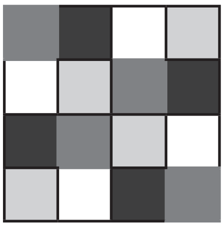
1	28	13	44	3	30	15	46
24	43	2	29	14	45	4	31
27	12	25	42	63	40	47	16
54	23	64	39	60	57	32	5
11	26	55	58	41	62	17	48
22	53	38	61	56	59	6	33
37	10	51	20	35	8	49	18
52	21	36	9	50	19	34	7

Un parcours [presque] au hasard



4 boucles pour la bordure

De plus le carré central est lui-même constitué de quatre boucles [comme nous l'avons vu au §2]



En alternant boucle latérale et boucle centrale on réussit à toutes les relier. Voici la solution obtenue :

1	56	25	44	3	58	27	34
24	43	2	57	26	33	4	59
55	12	63	32	45	16	35	28
42	23	46	13	62	29	60	5
11	54	31	64	15	48	17	36
22	41	14	47	30	61	6	49
53	10	39	20	51	8	37	18
40	21	52	9	38	19	50	7

***

Annexe 1 : commentaires

(Derniers commentaires des élèves sur le choix de ce sujet.)

Nous avons choisi ce sujet car pour nous il était enrichissant et paraissait très original ; comme on le dit de nos jours, il faut travailler en s'amusant! En lisant ce sujet nous voulions savoir s'il y avait une solution et, si oui, laquelle et pouvait-on la trouver de façon logique ? De plus nous avons pu faire de nouvelles connaissances et échanger avec d'autres élèves.

Annexe 2 : programme informatique

Notre chercheur nous a aidés à faire un programme informatique avec le logiciel Scilab, qui nous permet de tracer le trajet du cavalier lorsque celui-ci est possible.

L'inconvénient de ce programme est que, pour des échiquiers 7×7 ou 8×8, il prend beaucoup de temps pour trouver une solution (si elle existe) et quand la solution n'existe pas ... il tourne à l'infini. Il est donc à améliorer ...

NB: Les commentaires sont en italiques.et précédés de //

```
function [X,Y]=echecbis(a,b,L,l)
// a, le n°de la ligne de départ
// b, le n°de la colonne de départ
// L, nombre de lignes
// l, nombre de colonnes
// A, tableau des cases visitées
      my_handle = scf(100001);
      clf(my_handle,»reset»);
j=0,  // Test de fin : j vaut 0 tant qu'aucune solution n'est trouvée
// marquage de la case courante
while j==0,
  x=a,y=b,
  A=zeros(L,l),
  A(x,y)=1,
  i=0,
  X=[x],Y=[y],
 // initialisation
 //essai de déplacement : i vaut 0 tant qu'on ne s'est pas déplacé
 // et que l'on n'a pas essayé k fois
   while i ==0,
    m=0,k=0,
     while m==0,
       // tirage au hasard d'un type de déplacement du cavalier
      // (voir première figure)
        p=1+floor(8*rand(1,1 )),
      // limitation à 20 du nombres de tentatives d'avancées
      if k==20   then
         i=1,m=1,
      end
      // 1er type de mouvement du cavalier
      if p == 1 then
       // test: sortirait-on de l'échiquier ?
           if  x+2 > L | y-1< 1 then
             k=k+1,
       else
       // test: est-on déjà passé par la case ?
         if A(x+2,y-1)==1  then
          k=k+1,
       // déplacement vers une nouvelle case courante
         else
             m=1,x=x+2,y=y-1,X=[X,x],Y=[Y,y],
           A(x,y)=1,
          end
       end
      end
```

```
      // 2ème type de mouvement du cavalier
      if p == 2 then
         if  x+1 > L | y-2 < 1 then
          k=k+1,
        else
         if A(x+1,y-2)==1 then
         k=k+1,
        else
         m=1,x=x+1,y=y-2,X=[X,x],Y=[Y,y],
         A(x,y)=1,
          end
         end
      end
      //   [6 autres tests analogues correspondant
      //     aux 6 autres types de mouvement du cavalier :  3≤p≤n ]

      [...]
     end // ferme le while m==0
    // test : a-t-on parcouru toutes les cases ?
    if sum(A) == L*l then
     j=1,i=1,
    end  //
  end    // Ferme le while i=0
end    //ferme le while j==0
 // place les extrémités des segments du parcours au centre des cases
 Z=X-1/2*ones(1,L*l),
 T=Y-1/2*ones(1,L*l),
 // tracé de l'échiquier
 for ii=0:L
    lx=[ii,ii],ly=[0,l]
    plot2d(lx,ly,rect=[0 0 L l],axesflag=0)
 end
 for jj=0:l
   cx=[0;L],cy=[jj;jj],
    plot2d(cx,cy,rect=[0 0 L l],axesflag=0)
 end
 // tracé du parcours
 plot2d(Z,T,rect=[0 0 L l],axesflag=0)
endfunction
```