

LES GARDIENS DE LA GALERIE D'ART

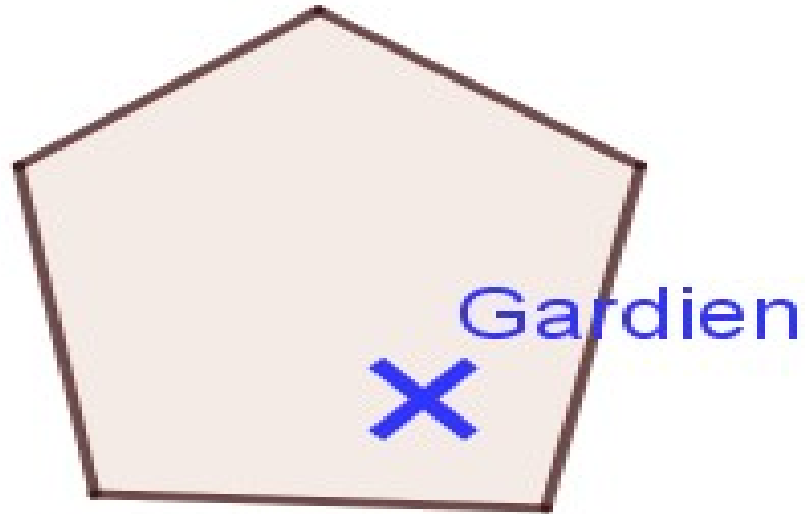


Étant donné une galerie d'art à n côtés, combien faut-il de gardiens pour surveiller toute la galerie ?



Des fois, c'est assez simple...

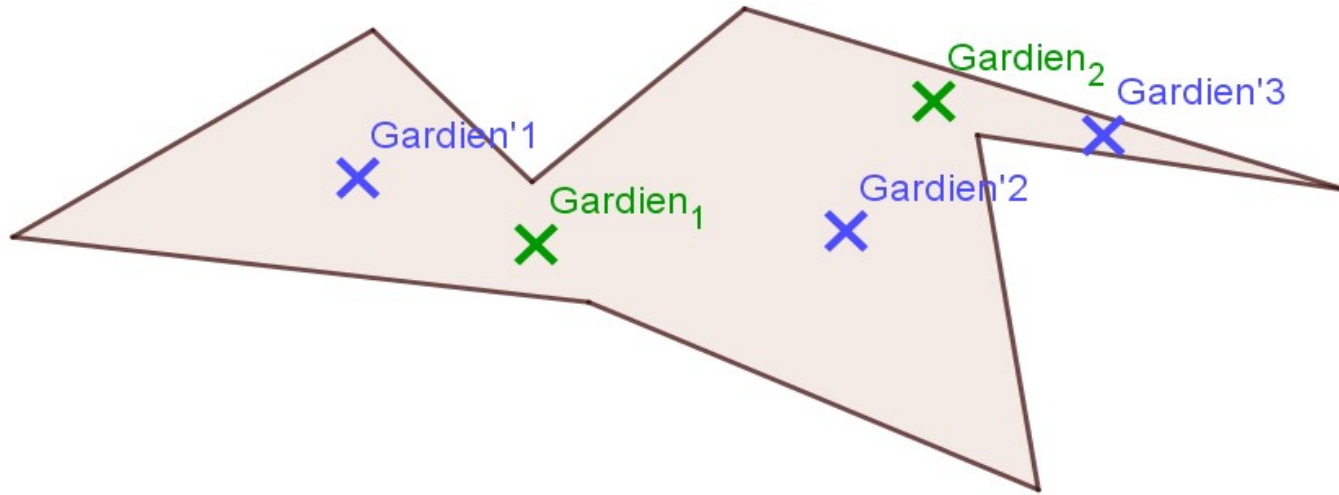
Ici, tout simplement.



Des fois, c'est un peu difficile

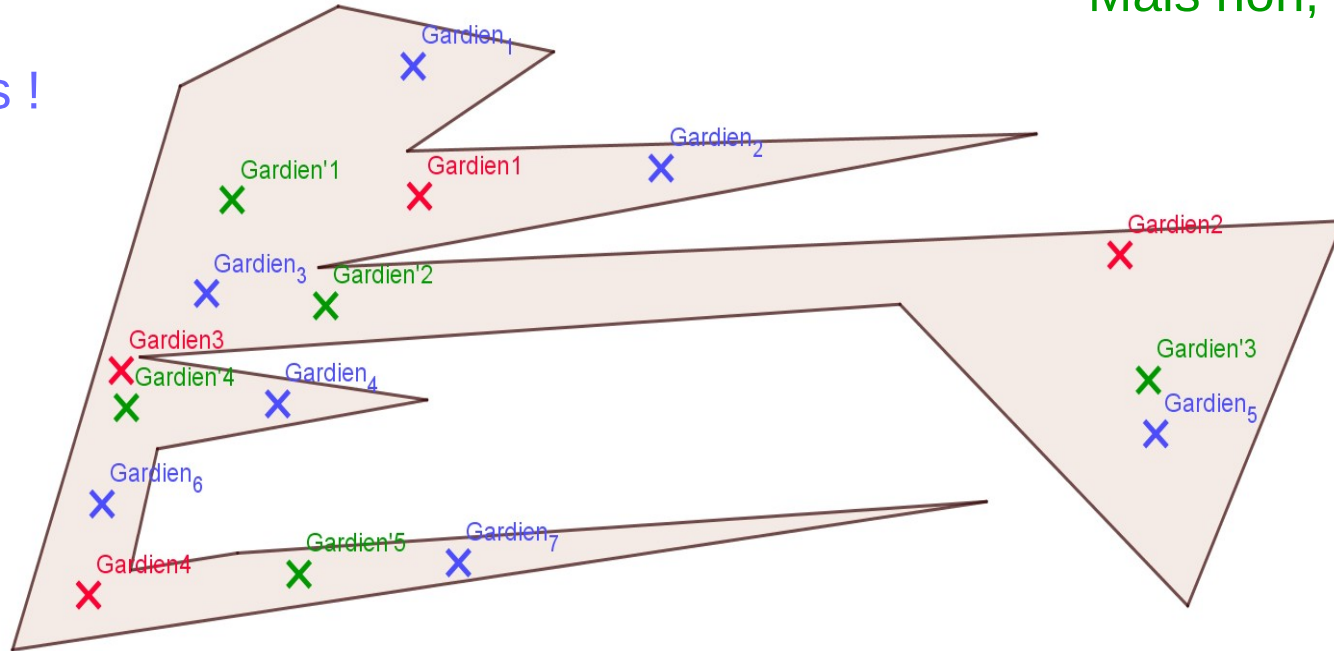
Heu, ici, ici, et là ?

Ça ne serait pas mieux comme ça ?



Des fois, c'est vraiment compliqué...

À ces endroits !



Mais non, à ceux-ci !

Non, ça marche pas comme ça !

Vaut mieux faire comme ça !

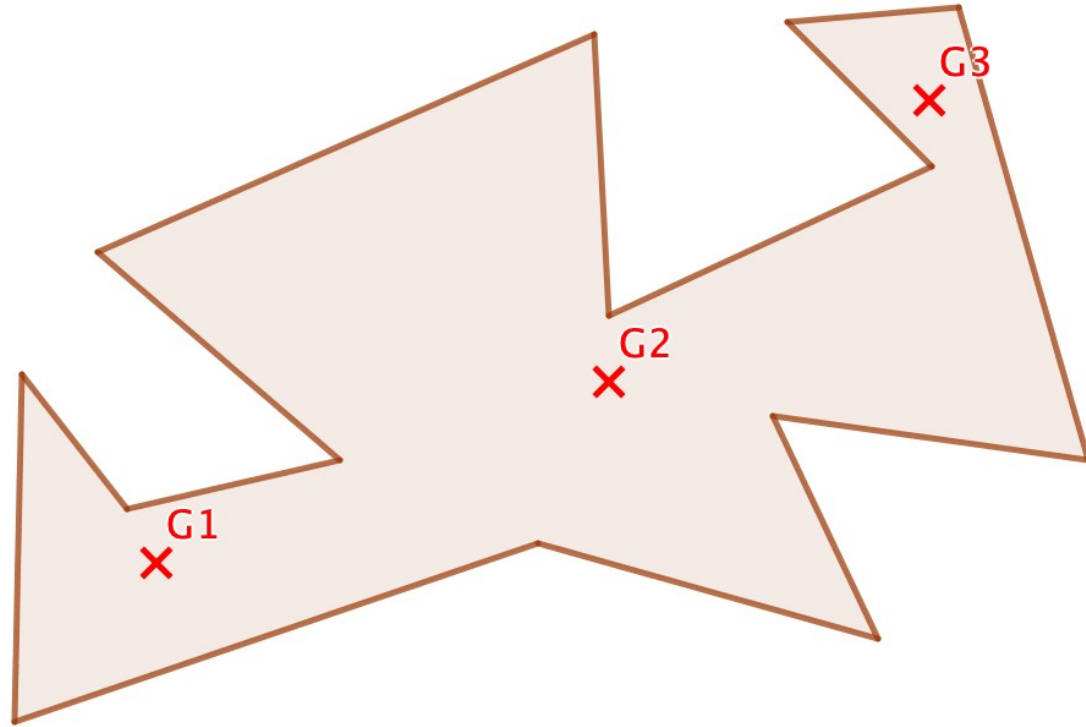
Sommaire

- Notre parcours
- 2 cas de polygones
- Conjectures / Démonstrations
- La Triangulation

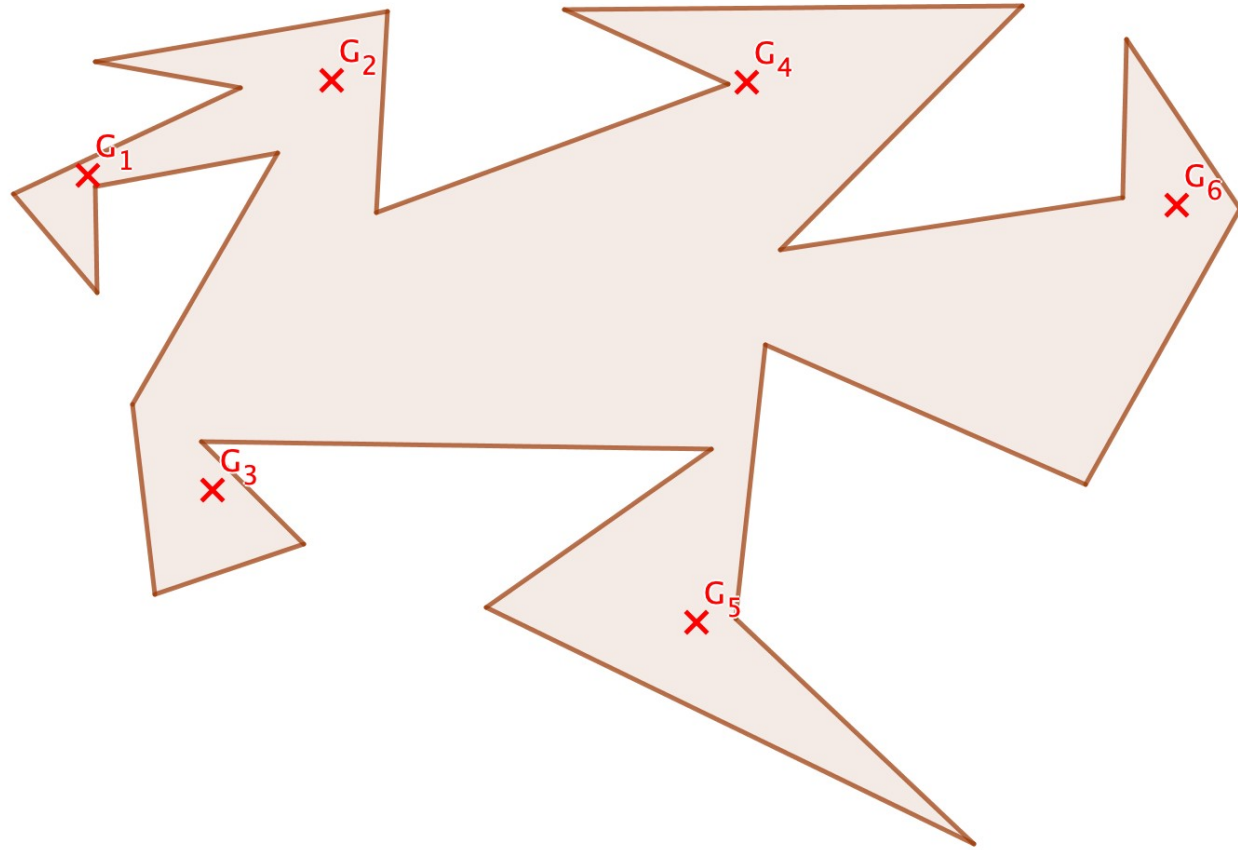
Notre parcours

Premièrement, nous avons essayé de placer nos gardiens un peu au hasard. Nous nous sommes rapidement aperçu que les sommets étaient des points clés et que nous devions distinguer deux types d'angles : saillants ou rentrants.

Après plusieurs exemples, une première conjecture est apparue.



Ici 3 gardiens suffisent.

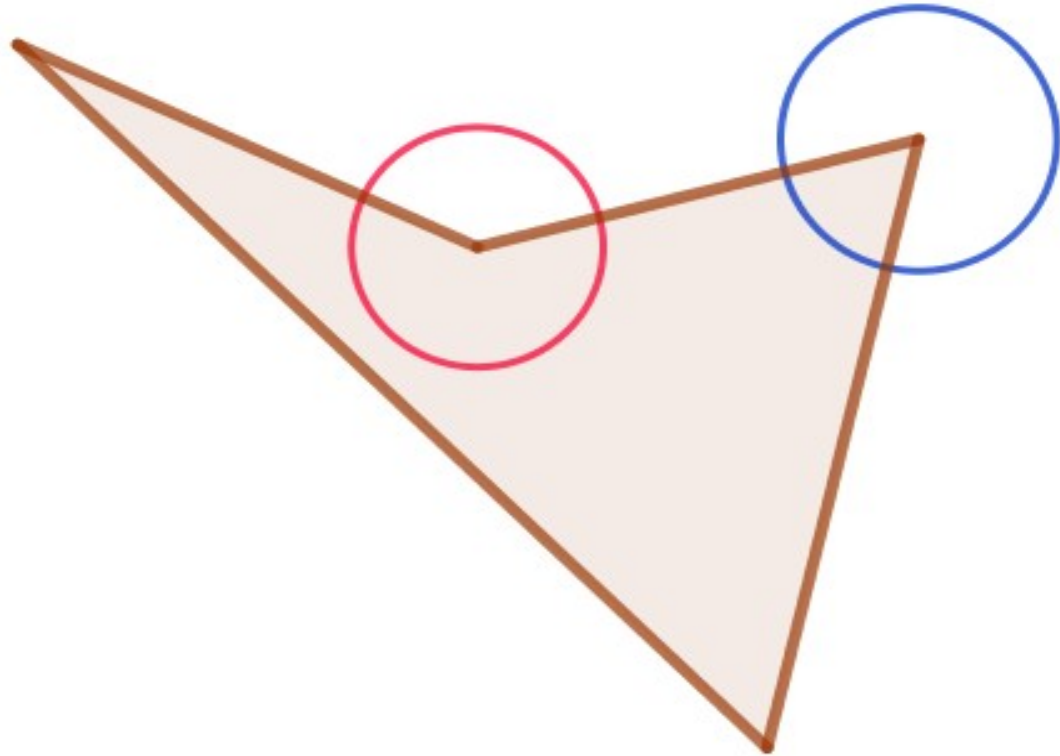


Ici 6 gardiens suffisent.

Qu'est-ce qu'un angle saillant ?
Qu'est-ce qu'un angle rentrant ?

Angle saillant

Angle rentrant



Les 2 cas de polygones

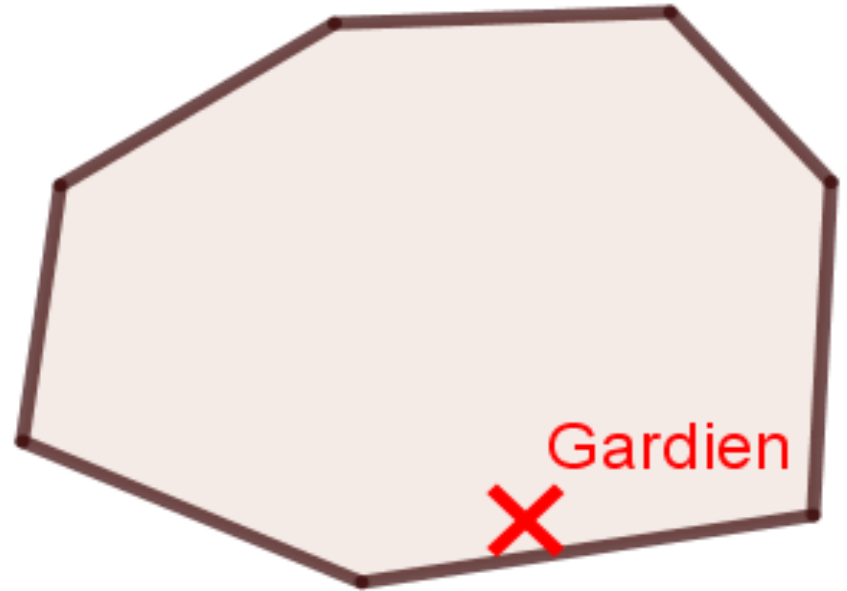
2 catégories de polygones :

- Polygone convexe (il n'a que des angles saillants).
- Polygone est concave (il a un ou plusieurs angles rentrants).

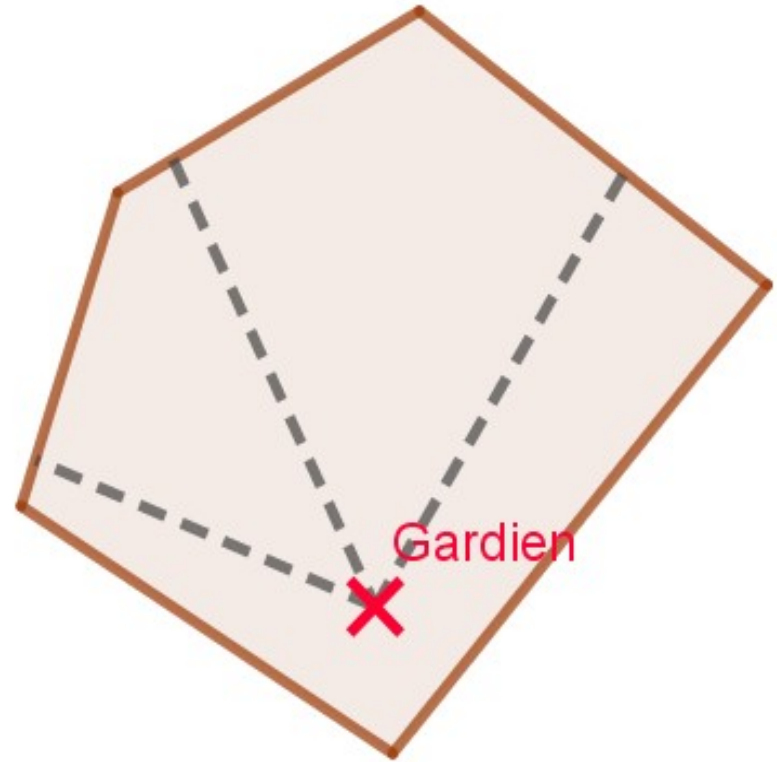
Exemple avec une figure convexe

Voici un exemple de figure convexe.

Il suffit de placer un gardien n'importe où, il surveillera tout le musée.

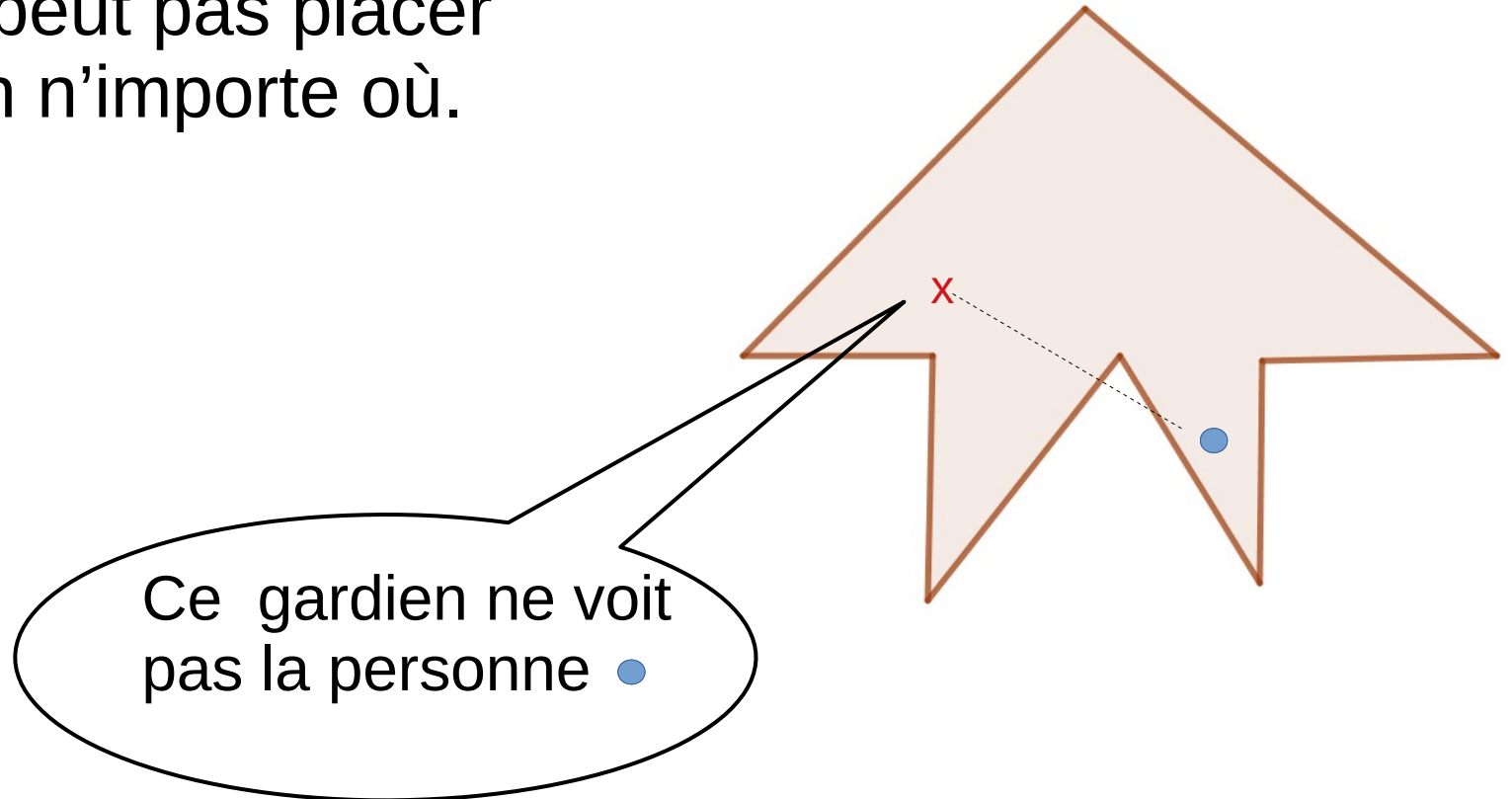


En effet, quelle que soit la direction dans laquelle il regarde, il verra l'un des côtés. En tournant sur lui-même il voit tous les murs et donc toute la galerie.



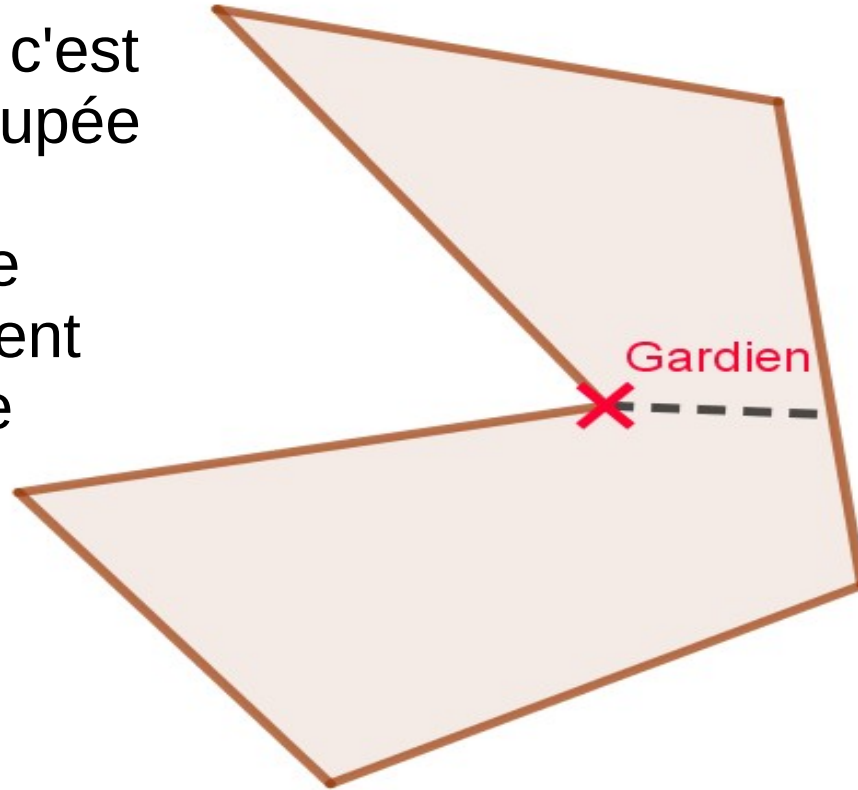
Exemple avec une figure concave

Ici, on ne peut pas placer un gardien n'importe où.



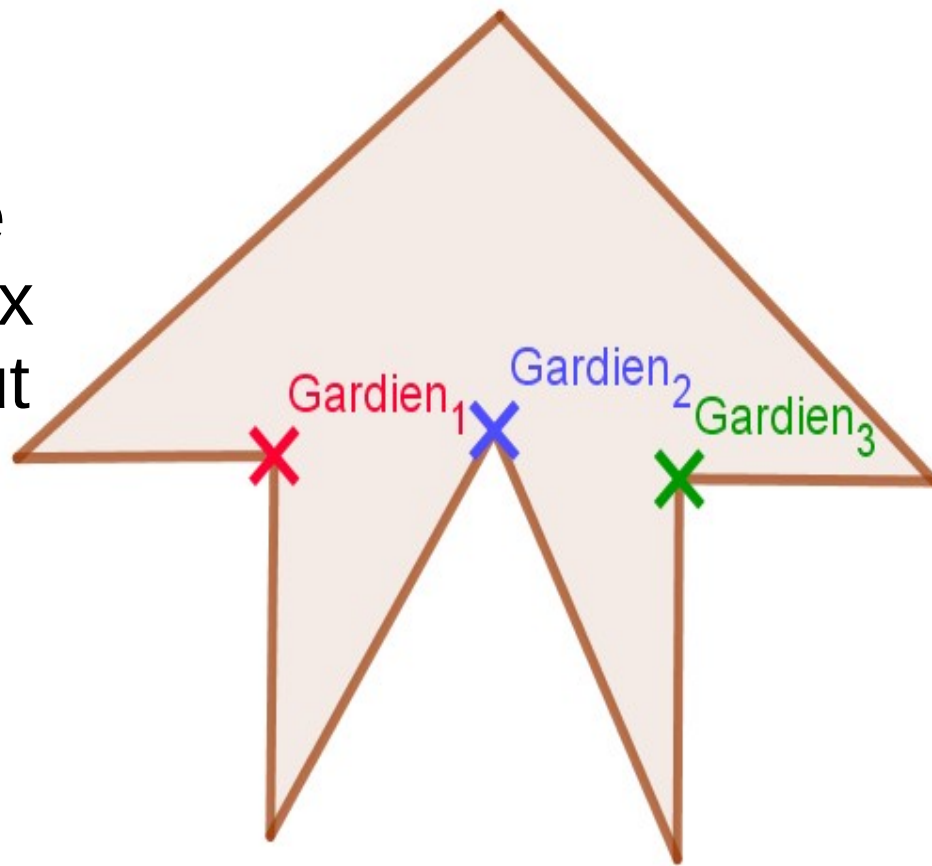
Remarque :

Si la figure est concave, c'est comme si elle était découpée en plusieurs figures convexes qui ont comme côtés communs un segment dont une extrémité est le sommet d'un angle rentrant.



On peut en effet constater qu'il suffit de placer les gardiens aux angles rentrants et tout est surveillé.

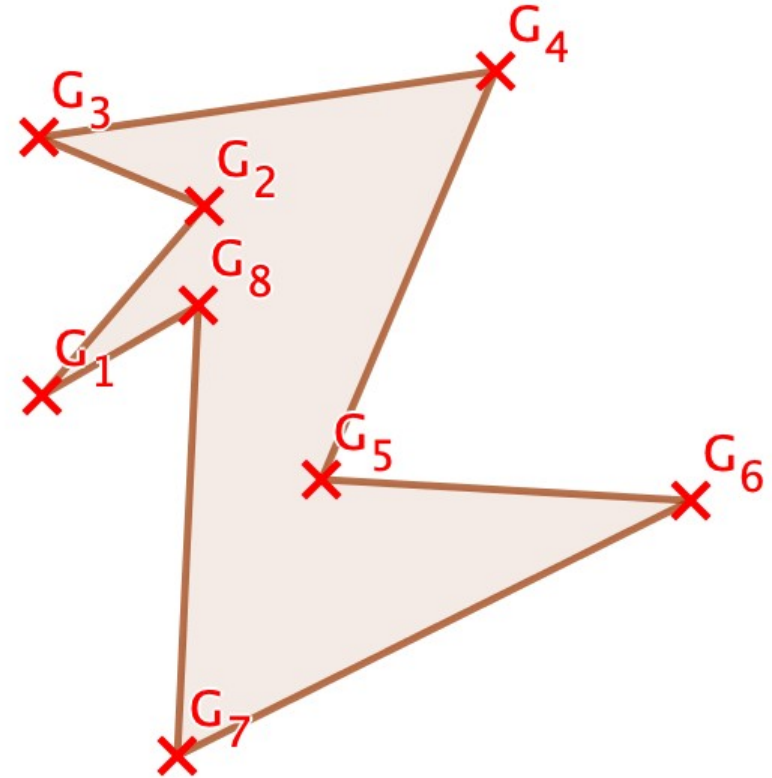
Mais on peut certainement faire mieux !



Recherche du nombre minimum de gardiens G nécessaire pour surveiller la galerie à n côtés.

Proposition n°1 : Si on place un gardien sur chaque sommet, la galerie est surveillée.

On a donc : $G \leq n$



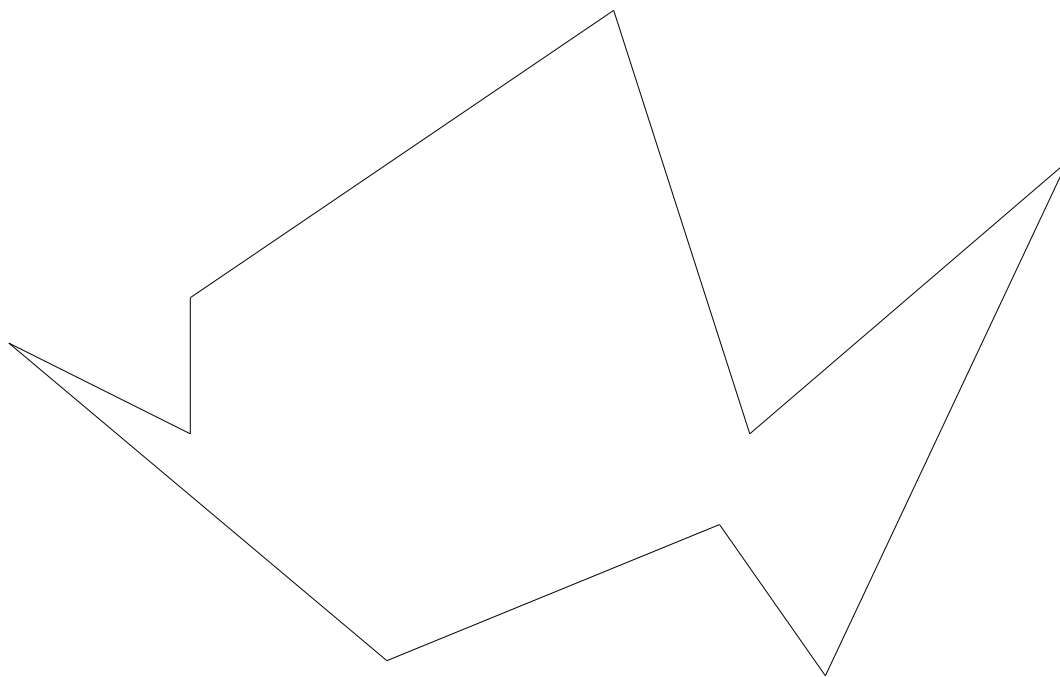
Conjecture

Après de nombreux exemples, il semble que le nombre de gardiens G ne dépasse jamais la partie entière de $n/3$.

Nous avons tenté de l'expliquer.

La Triangulation

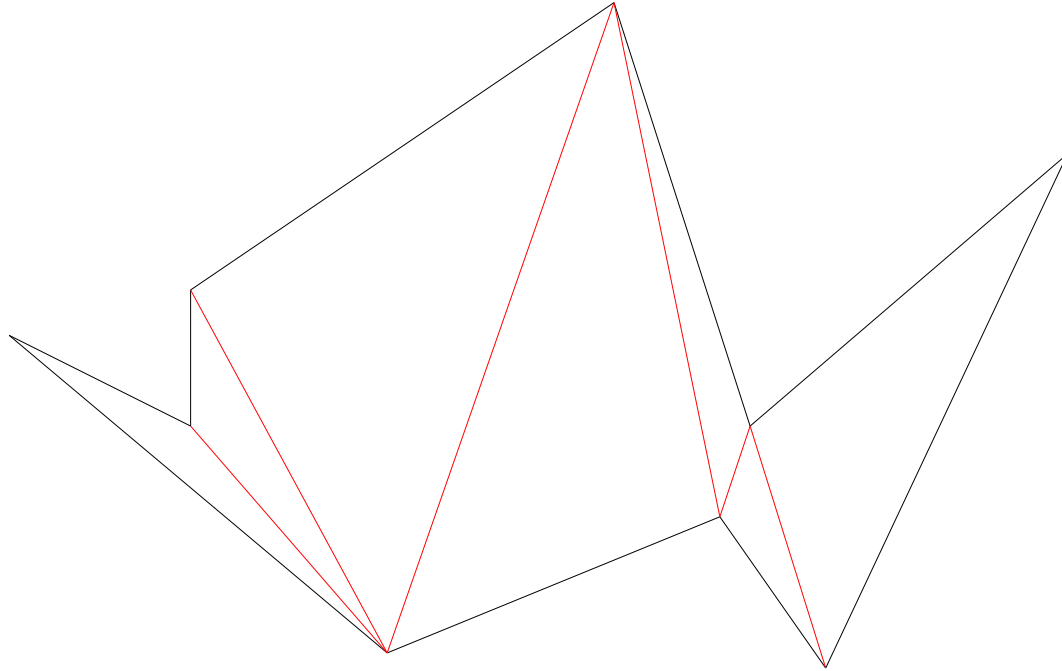
On prend un polygone à n côtés quelconque.



On relie les sommets de façon à obtenir uniquement des triangles.

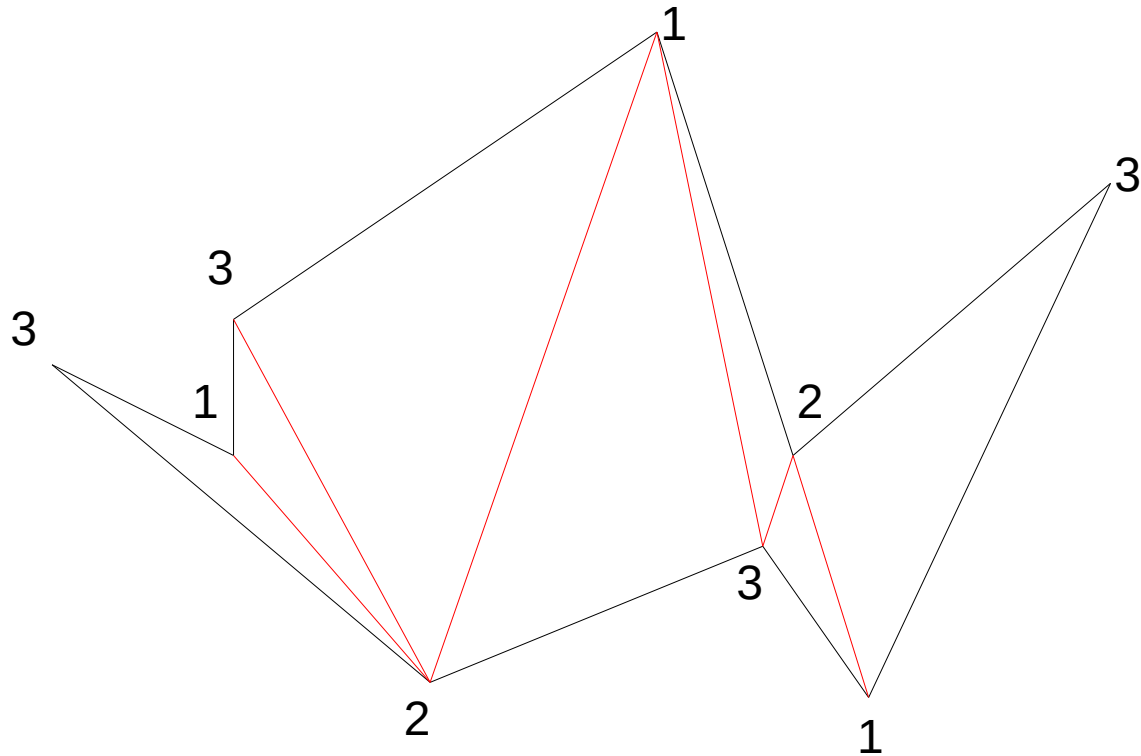
Il est toujours possible de trianguler un polygone.

Voici une façon de trianguler le polygone (ce n'est pas la seule) : on va de proche en proche.



On nomme ensuite tous les sommets avec un N° 1, 2 ou 3 en respectant cette règle :

Deux sommets de même numéro ne peuvent pas être reliés.



Cette numérotation est toujours possible.

Lemme (qu'on nous a donné) :

Tous les polygones triangulés peuvent être numérotés
uniquement avec 3 nombres différents.

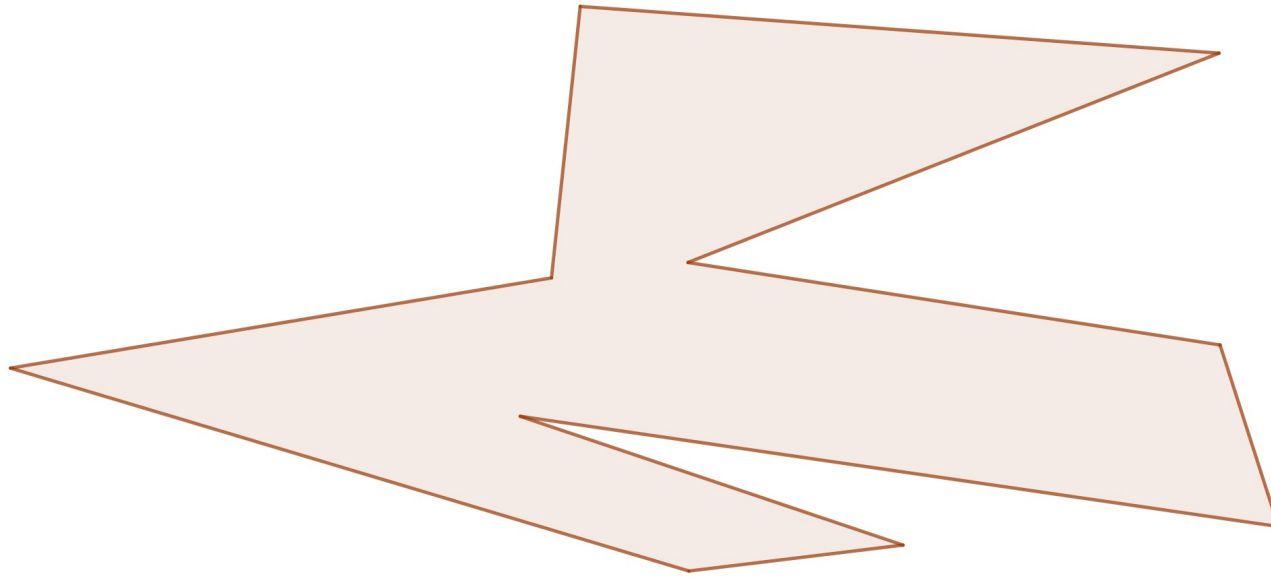
Ensuite, on regarde quel nombre apparaît le moins de fois, et on place les gardiens aux sommets portant ce nombre. Ce gardien verra toute la zone intérieure du triangle.

Chaque triangle a sur chaque sommet : 1, 2 et 3

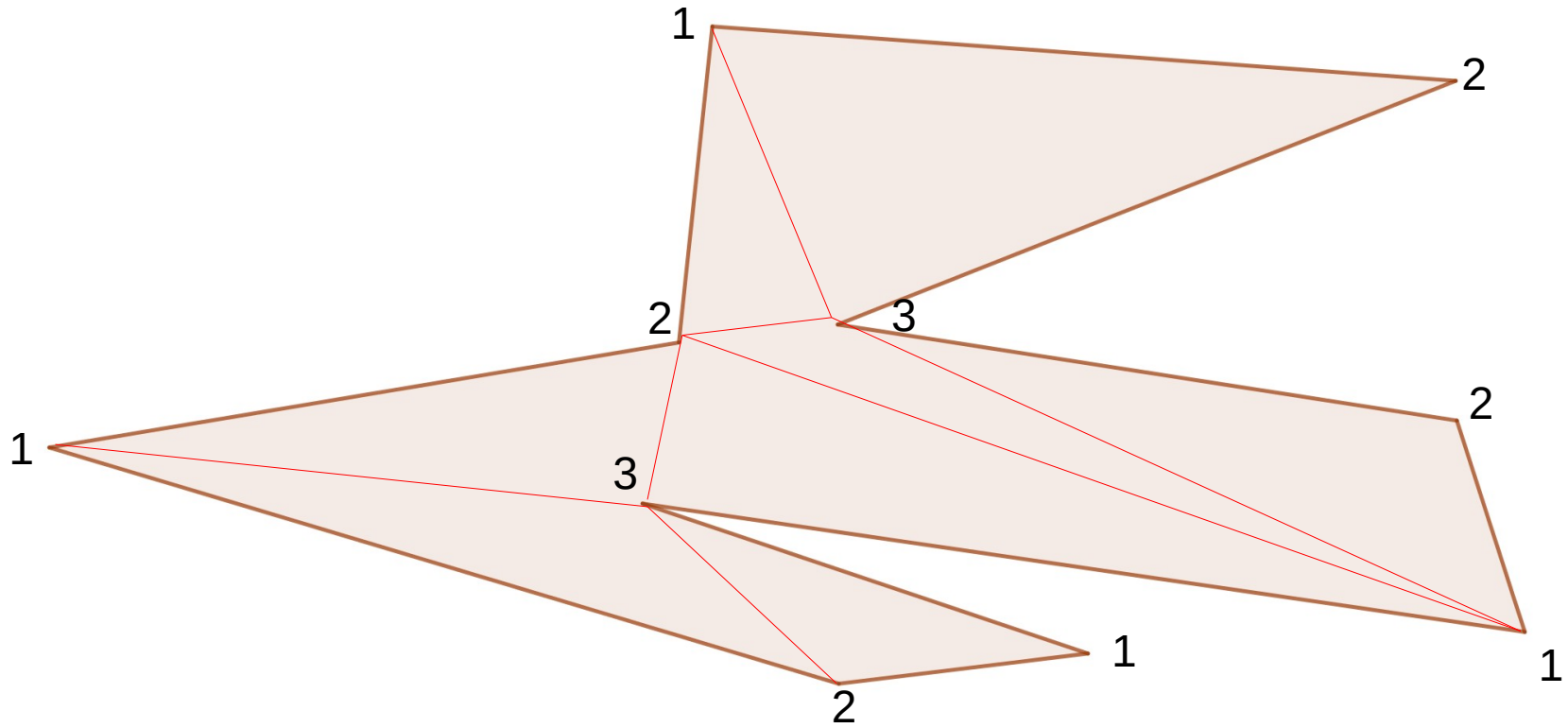
Soit n le nombre de sommets du polygone et g le nombre de gardiens nécessaires.

On a donc : $g \leq \frac{n}{3}$

Voici un exemple : polygone à 10 côtés

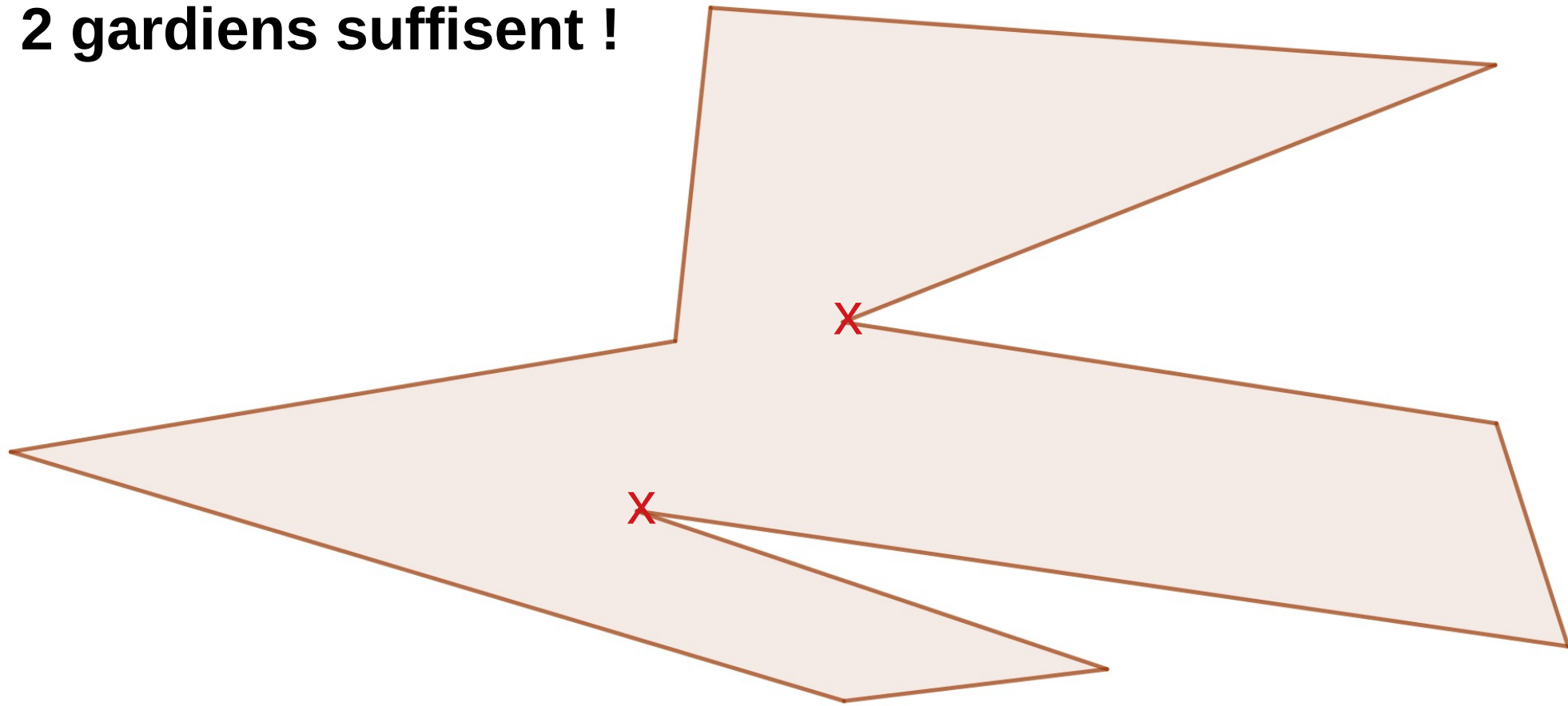


Si on applique ce qu'on a vu, il faut au maximum
3 gardiens. $\binom{10}{3}$

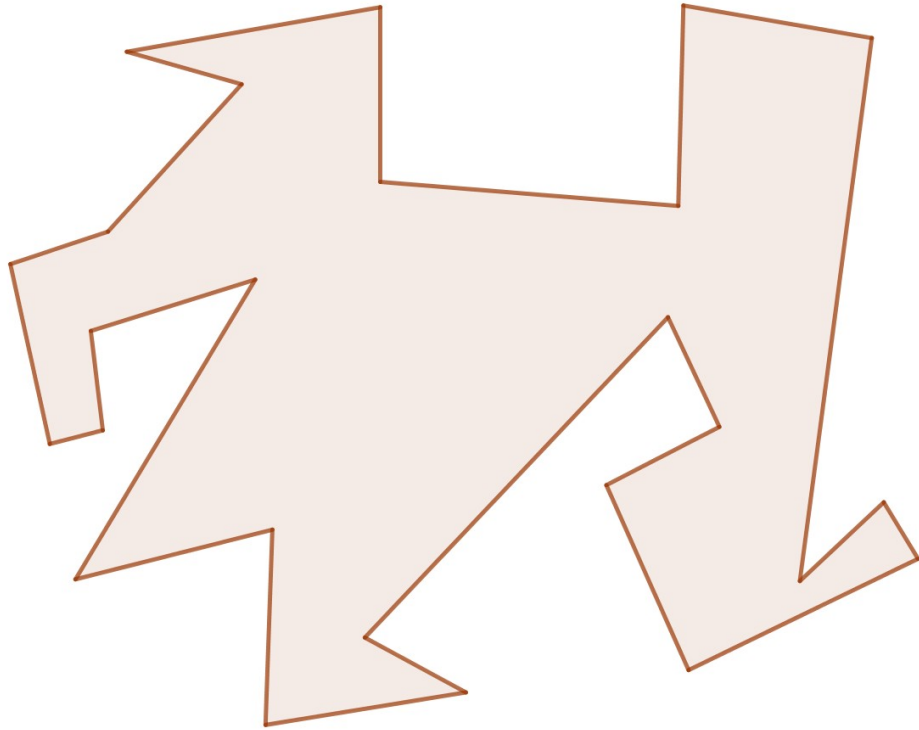


Les « 3 » sont les moins nombreux donc Il suffit de 2 gardiens placés sur ce numéro.

2 gardiens suffisent !

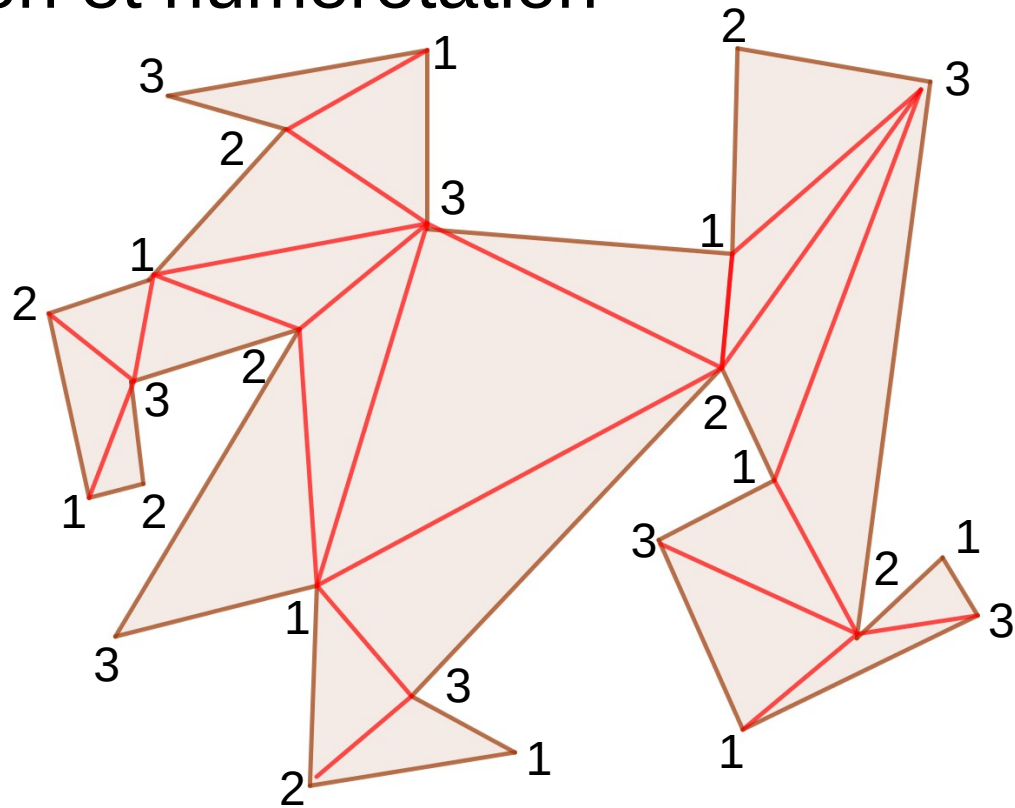


Voici un autre exemple : polygone à 25 côtés



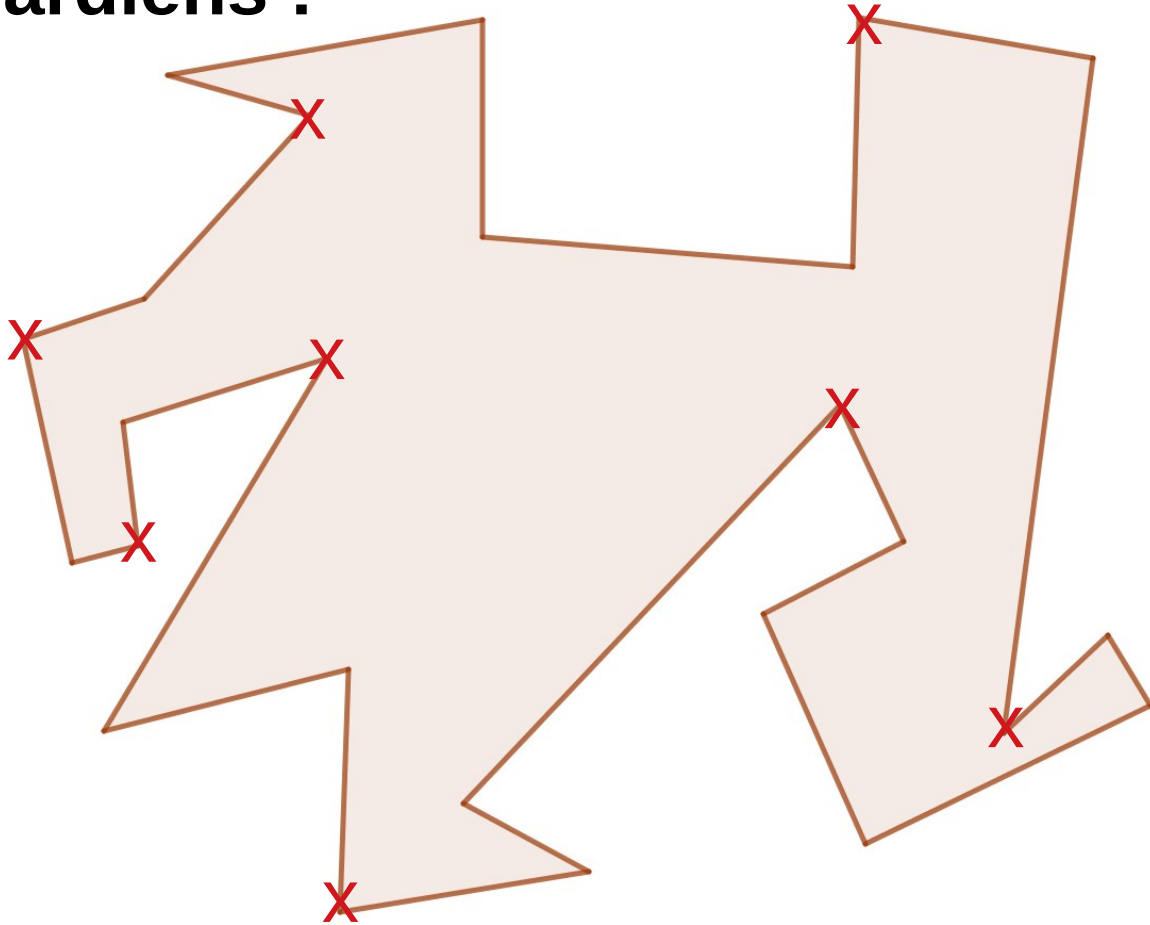
On doit pouvoir tout surveiller avec au maximum
8 gardiens. $\left(\frac{25}{3}\right)$

Triangulation et numérotation



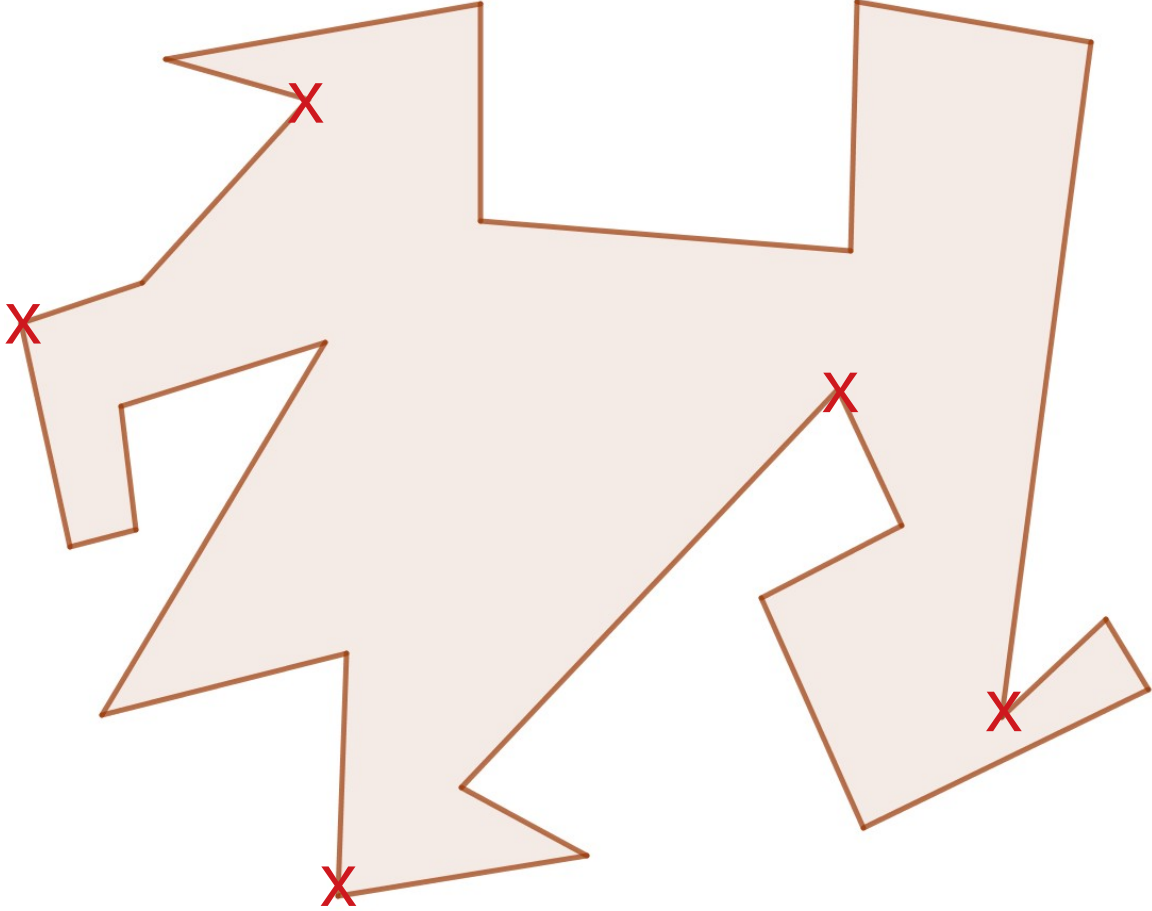
Les « 2 » ou « 3 » sont les moins nombreux, il y en a 8 ; on sait donc où placer ces gardiens.

Voilà les 8 gardiens !



On peut encore réduire leur nombre

5 gardiens suffisent !



Avec cette technique, on ne trouve pas le minimum de gardiens à placer mais on sait que ce minimum sera inférieur au nombre trouvé.

FIN