Graphes numérotés

Année 2019-2020

Auteurs : Adèle PIVETEAU, Anna SAFARIAN (Terminale S).
Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort (79).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN, Thomas FORGET.
Chercheur : Abdallah EL HAMIDI, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement, LaSIE, UMR CNRS 7356, La Rochelle Université.

Dans cet article, nous proposons plusieurs résultats sur le problème de la « numérotation des graphes ». Nous traitons les cas des graphes « en ligne », des graphes « en pissenlit » et des graphes cycliques.

1) Présentation du problème :

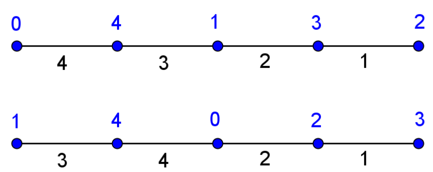
On considère un graphe à n arêtes, dont on numérote les sommets en choisissant des entiers dans l'ensemble $\{0, 1, \dots , n\}$. Chaque entier ne peut être choisi qu'une seule fois.
Ensuite chaque arête prend la valeur absolue de la différence de ses sommets.
Le but du jeu est de trouver une numérotation pour laquelle les arêtes ont toutes des valeurs différentes (de 1 à n).

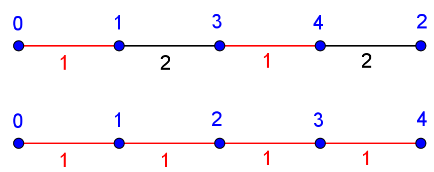
Notre but pour la suite a été de traiter le cas de certains graphes particuliers en donnant une numérotation correcte ou en montrant qu'il ne peut pas y en avoir.

2) Le cas des graphes en ligne :

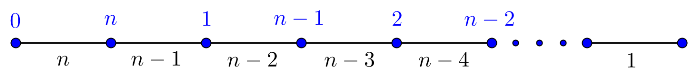
En premier lieu on choisit d'étudier le cas du graphe en ligne.
Par exemple, le graphe en ligne à 5 sommets (et 4 arêtes) est représenté ci-dessous.

Voici plusieurs numérotations possibles.
Les deux numérotations de gauche sont correctes mais pas celles de droite.



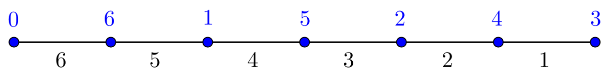


En testant plusieurs valeurs de n nous avons trouvé la méthode générale suivante :

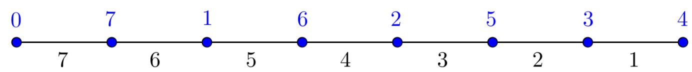


Comment connaître la valeur du dernier sommet ? Deux cas se présentent :

1) Si n est pair le dernier sommet aura pour valeur : $\frac{n}{2}$.

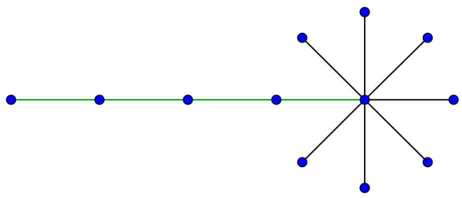


2) Si n est impair le dernier sommet aura pour valeur : $\frac{n+1}{2}$.



3) Le cas des graphes en pissenlit :

Nous avons appelé graphe en pissenlit un graphe construit sur ce modèle :



Un graphe en pissenlit dépend de deux paramètres :
- le nombre t d'arêtes pour la tige ;
- le nombre p d'arêtes pour les pétales.

Dans la suite, on pose $n = t + p$.

Sur le graphe ci-dessus, on a $t = 4$ et $p = 7$, soit $n = 11$.

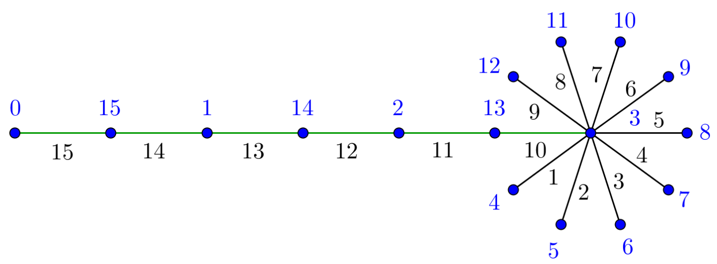
Après plusieurs tentatives nous conjecturons qu'il suffit de raisonner comme pour le graphe en ligne. Autrement dit, on procède ainsi :

Pour la « tige », on commence par inscrire 0 sur le premier sommet (à la racine) puis n sur le second, puis 1 sur le troisième, etc. jusqu'au sommet représentant le cœur de la fleur qui portera le numéro :

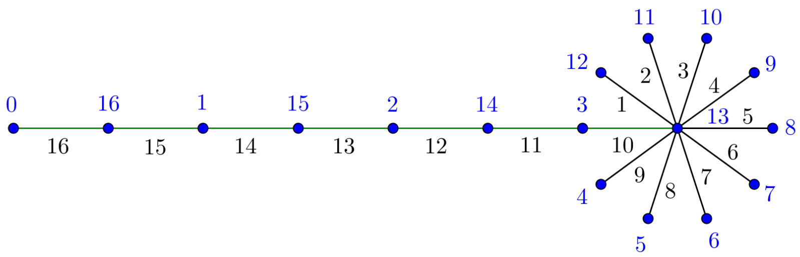
- $\frac{t}{2}$ si t est pair ;
- $n - \frac{t-1}{2}$ si t est impair.

Pour les pétales il suffit de répartir les nombres restants sur les sommets restants.

Exemple : Voici une numérotation correcte du graphe en pissenlit pour $t = 6$ et $p = 9$.

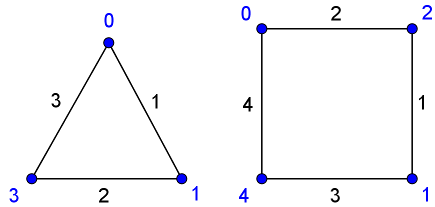


Exemple : Voici une numérotation correcte du graphe en pissenlit pour $t = 7$ et $p = 9$.

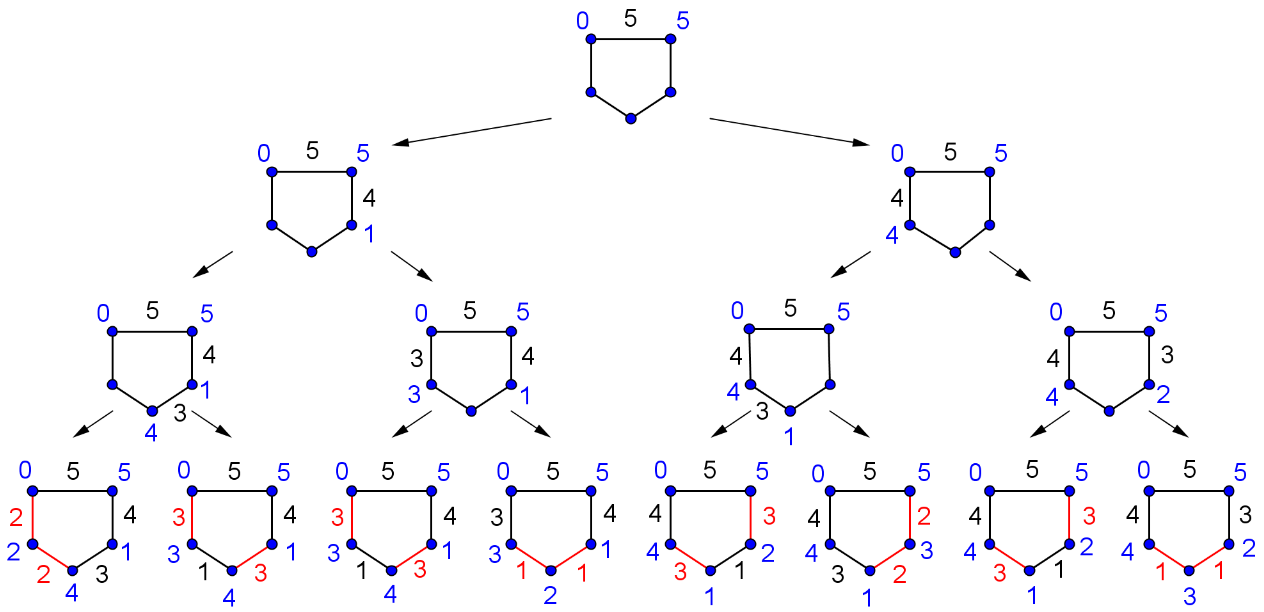


4) Le cas des graphes cycliques:

Ensuite, nous nous sommes intéressées aux graphes cycliques.
Un graphe cyclique est un polygone.
Pour les graphes cycliques à 3 ou 4 arêtes, nous avons trouvé les solutions suivantes :



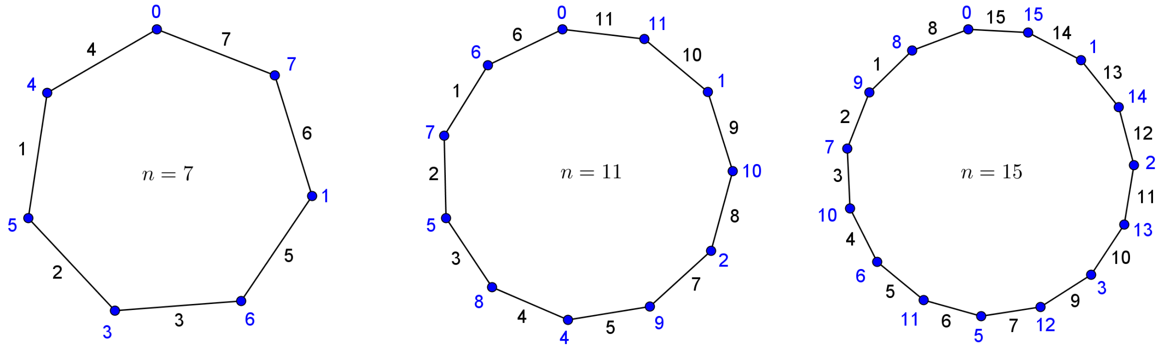
Nous avons ensuite cherché une solution pour le pentagone.
Pour obtenir une arête numérotée « 5 » il faut placer les sommets 0 et 5 côte à côte.
Il n'existe alors que deux façons d'obtenir l'arête numérotée « 4 ».
Pour chacun de ces configurations, il y a deux façons d'obtenir l'arête numérotée « 3 ».
Le dessin ci-dessous indique tous les cas auxquels on aboutit et aucun ne donne une numérotation correcte. Le pentagone ne peut donc pas être numéroté selon notre règle du jeu.



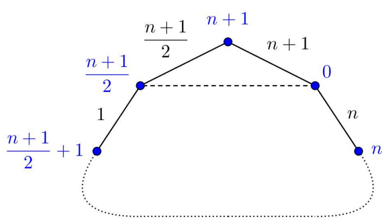
En cherchant des résultats pour les graphes à 7 et 8 arêtes, nous avons trouvé un schéma qui avait l'air de fonctionner aussi pour les graphes à 11, 12, 15 et 16 arêtes.

Voici comment procéder. On considère un graphe à n arêtes, n étant impair.
On commence par placer 0, puis la valeur maximale (n) à côté du 0.
De l'autre côté du 0 on place $\frac{n+1}{2}$.

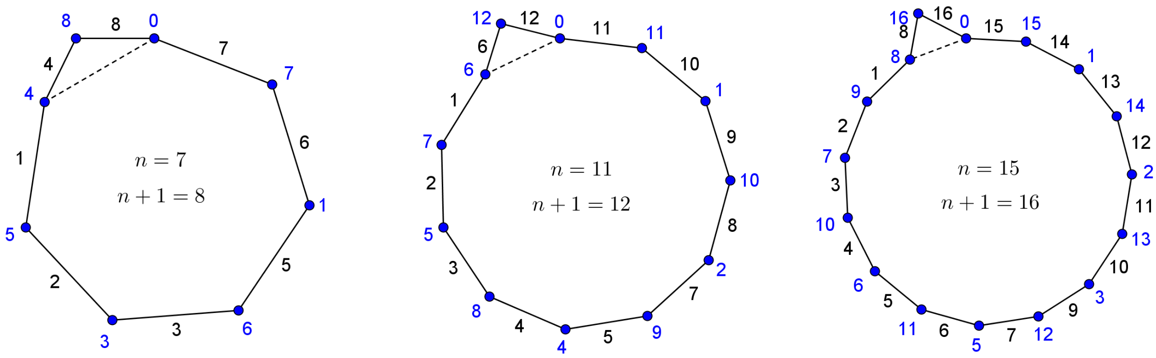
Sur les <u>arêtes</u>, on met d'abord n, puis $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... , jusqu'à arriver à $\frac{n+1}{2}$ que l'on n'inscrit PAS sur l'arête.
Sur l'arête entre le sommet $\frac{n+1}{2}$ et le sommet 0, on met $\frac{n+1}{2}$ puis 1, 2, 3, … jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'arêtes.
Nous avons remarqué que, à chaque fois, le nombre qui n'est pas présent sur les sommets est $\frac{n+1}{4}$.
Voici ce que cela donne pour $n=7$, $n=11$ et $n=15$.



Nous avons décrit cette méthode pour un nombre d'arêtes n impair.
Pour l'adapter au graphe suivant (avec $n + 1$ arêtes), on sectionne en deux l'arête entre le sommet 0 et le sommet $\frac{n+1}{2}$ et on crée un nouveau sommet.
On met alors sur le sommet créé le nombre $n + 1$ et de cette façon on retrouve sur les deux nouvelles arêtes les nombres $n + 1$ et $\frac{n+1}{2}$.

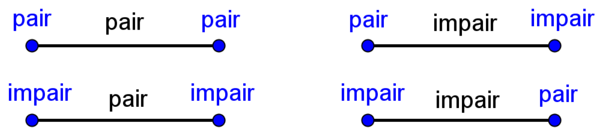


Voici ce que cela donne pour $n=7$, $n=11$ et $n=15$.



On a ensuite cherché à comprendre pourquoi les graphes à 5, 6, 9 ou 10 arêtes ne pouvaient pas être bien numérotés.

Pour ce faire on s'est intéressé à la parité des nombres. Nous avons alors remarqué que :
- pour avoir un nombre pair sur une arête il faut soit deux sommets avec un numéro pair, soit deux sommets avec un numéro impairs ;
- pour avoir un nombre impair sur une arête, il faut un sommet avec un nombre pair et un sommet avec un nombre impair.



On se place maintenant sur le sommet numéroté 0 et on parcourt les arêtes les unes après les autres jusqu'à revenir au sommet numéroté 0.
Avec les remarques précédentes, on note que :
- si on est sur un sommet pair et qu'on passe sur une arête paire, on arrive sur un sommet pair ;
- si on est sur un sommet impair et qu'on passe sur une arête paire, on arrive sur un sommet impair ;
- si on est sur un sommet pair et qu'on passe sur une arête impaire, on arrive sur un sommet impair ;
- si on est sur un sommet impair et qu'on passe sur une arête impaire, on arrive sur un sommet impair.
Passer sur une arête impaire change donc la parité du sommet et passer sur une arête paire conserve la parité du sommet.

Dans le cas de 5 arêtes, il faut passer sur deux arêtes paires (2 et 4) et trois arêtes impaires (1, 3 et 5) donc si on part du sommet numéroté 0, on change trois fois de parité et on arrive sur un sommet impair ce qui n'est pas possible.
De même dans le cas de 6 arêtes, il faut passer sur trois arêtes impaires (1, 3 et 5) donc la numérotation correcte n'est pas possible.
Dans le cas de 9 ou 10 arêtes, il faut passer sur cinq arêtes impaires (1, 3, 5, 7 et 9) donc la numérotation correcte n'est pas possible.

De façon générale, on ne peut pas trouver de numérotation correcte quand il y a un nombre impair d'arêtes impaires, c'est-à-dire pour les entiers n de la forme $4k+1$ ou $4k+2$.

n	Numérotation correcte
3	Possible
4	Possible
5	Impossible
6	Impossible
7	Possible
8	Possible
9	Impossible
10	Impossible
11	Possible
12	Possible
13	Impossible
14	Impossible
15	Possible
16	Possible