

Les réseaux d'Automates Booléens

Année 2024 – 2025

Charline Alvarez, Lucy Cavailles, Mandélyla L., Amory Botz, Ambroise Cirioni, Anthony Jubin
élèves de classe de seconde et premières

Établissement(s) : Lycée Olympe de Gouge de Montech

Enseignant-e(s) : Adeline Cavailles, Yves Pellerin, ...

Chercheur-Chercheuse(s) : Xavier Bressaud, Institut Mathématiques de Toulouse

1. Les automates.

1.1. Présentation du sujet

On travaille avec une configuration binaire (0 ou 1). Par exemple, la configuration 10101 est une configuration valide à l'inverse de 2436.

On peut donc écrire toutes les configurations sous la forme littérale suivante : $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ où chaque nombre x_k représente un chiffre binaire soit 0 ou 1.

Chaque nombre x_k est appelé coordonnée. Par exemple, si on considère la configuration 10101, on a : $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$ et $x_5 = 1$.

A ces configurations, on va y appliquer des fonctions et étudier ce qui se passe.

1.2. Résultats généraux.

On considère la fonction définie par $f(x_1 x_2 x_3) = (x_1 + x_2, x_1, x_2)$. (On ajoute **1** les deux premières coordonnées ensemble et on met le résultat en première coordonnée en décalant toutes les autres coordonnées.) .Si on applique cette fonction à 100, on obtient alors : 110.

Un réseau d'automates booléens est l'application d'une même fonction à une même configuration jusqu'à l'obtention de la répétition d'une configuration.

Par exemple, si on considère la fonction f ci-dessus et la configuration de départ 101. En appliquant f consécutivement à 101 puis aux configurations obtenues, on a alors : $101 \rightarrow 110 \rightarrow 011 \rightarrow 101$.

Voici un autre exemple. Cette fois-ci, on considère la fonction définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1, x_2)$.

Si on applique la fonction à 100, on obtient le réseau suivant :

$100 \rightarrow 110 \rightarrow 111 \rightarrow 011 \rightarrow 101 \rightarrow 010 \rightarrow 001 \rightarrow 100$.

Nos recherches se sont principalement penchées sur l'étude des cycles.

Un cycle représente l'ensemble des différentes configurations pour revenir sur la configuration initiale ou se retrouver dans une boucle infinie sans jamais revenir sur la configuration initiale.

On appelle longueur du cycle le nombre de configurations avant d'arriver sur une boucle infinie.

Le cycle (2) de la fonction définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1, x_2)$ pour la configuration 101 vaut donc 3.

Le cycle de la fonction définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1, x_2)$ pour la configuration 100 vaut donc 7.

Nous avons alors constaté que le cycle le plus grand pour une configuration de n coordonnées vaut :

$2^n - 1$ où 2^n est le nombre total de configurations lorsque l'on travaille avec n coordonnées.

Comme chaque coordonnée peut être égale à 0 ou 1, on obtient donc 2^n configurations possibles en tout.

Comme la configuration composée uniquement de 0 est toujours transformée en elle-même (3), on enlève cette configuration d'où le « -1 ».

Nous avons également créé un algorithme en Python pour calculer toutes les configurations mais l'algorithme n'est pas optimisé (4) puisqu'il calcule $2^n * n^2$ possibilités. Nous nous sommes arrêtés à une configuration de 5 coordonnées pour nos recherches à la main (5) et une configuration de 9 coordonnées à l'ordinateur. Au delà les calculs deviennent trop longs à la main et trop nombreux pour l'ordinateur.

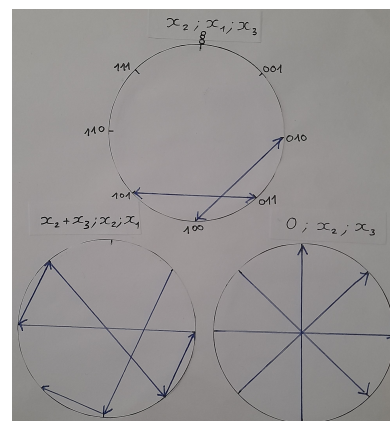
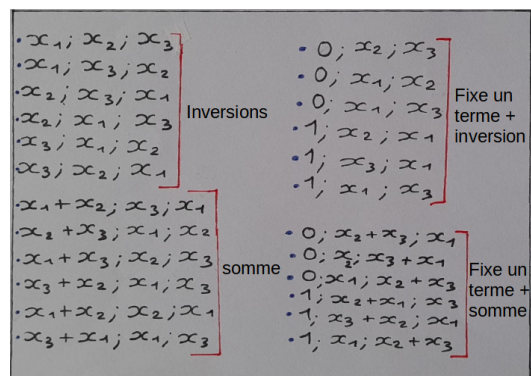
Lien des différents programmes : <https://github.com/enzoambrose/Math-en-Jean-2025-Boolean-Automat>

1.3. Résultats des recherches pour les configurations à trois éléments.

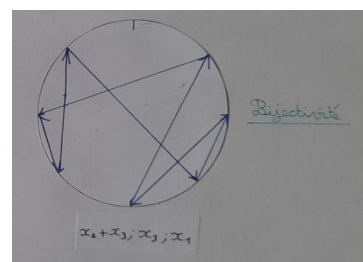
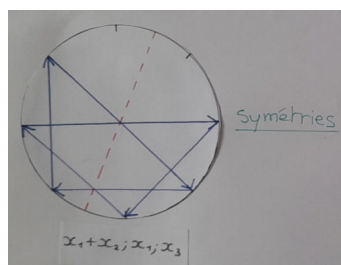
Dans le cadre des ateliers MATH.en.JEANS, nous avons fait des recherches sur le sujet « Réseaux d'automates booléens ». Nous étions aidées par un chercheur ainsi que plusieurs professeurs de mathématiques du lycée. Nous avons étudié le sujet pour $n=3$.

Premièrement, nous avons listé des fonctions contenant des inversions (6), des sommes et où l'on fixait des nombres. Nous avons calculé que le nombre maximal de fonctions pour trois termes est de 729 (9 possibilités pour chaque terme $\rightarrow 9^3 = 729$).

Ensuite, pour que le problème soit plus concret, nous avons traduit les différentes fonctions sous forme de cercles. Nous avons observé des cycles (boucles fermées, on prend un point du cycle et on va retomber sur celui-ci en appliquant plusieurs fois la fonction) et des branches transitoires (points qui ne forment pas une boucle fermée, et qui mènent à un cycle de longueur un). (7)



Nous avons pu constater que certaines configurations possédaient une symétrie axiale.



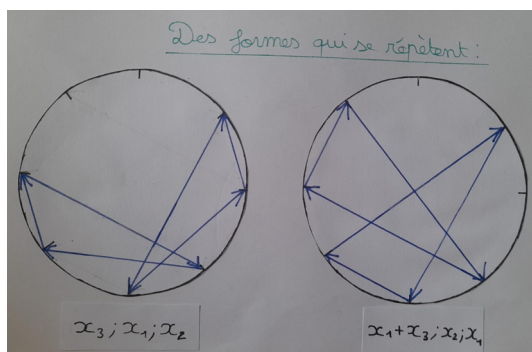
Nous avons aussi pu observer des cas de bijectivité, c'est-à-dire des cas où il y avait un cycle, avec lequel en partant de n'importe quel point hormis 000, on pouvait retomber sur celui-ci en appliquant plusieurs fois la fonction.

Nous avons trouvé une formule permettant de déterminer la longueur du cycle le plus long :

$$2^n - 1$$

Pour $n=3$: $2^3 - 1 = 7$

Chercher le cycle le plus long revient à chercher une représentation bijective.



Dans plusieurs configurations différentes, nous avons observé des formes qui se répétaient comme des cycles de longueur trois qui formaient deux triangles.

Enfin, nous avons construit un tableau (8) pour y regrouper les différentes fonctions présentant le même nombre de cycles et de branches transitoires.

- 1 cycle de 7 - 1 cycle de 1	- 2 cycles de 3 - 2 cycles de 1	- 4x2 branches trans. - 2 cycles de 1
$x_2+x_3; x_3; x_1$	$x_1+x_3; x_2; x_1$	$0; x_1; x_3$
$x_1+x_3; x_1; x_2$	$x_1+x_2; x_1; x_3$	$0; x_1+x_3; x_3$
$x_2+x_3; x_1; x_2$		

2. Conclusion

Nous n'avons pas étudié toutes les configurations avec trois éléments et le tableau présenté ci-dessus n'est pas exhaustif.

Il est important de noter que nous avons choisi d'effectuer nos recherches pour les algorithmes pour les fonctions qui sont définies à l'aide d'une somme en première coordonnée et d'un décalage des autres coordonnées. Nous n'avons pas essayé d'autres fonctions pour n dépassant 3. Nous vous laissons le soin de vous y pencher si le sujet vous intéresse.

Notes d'édition

(1) La somme est celle des booléens, sans retenue : en particulier, $1 + 1 = 0$.

(2) La longueur du cycle, plutôt ; de même pour les deux lignes suivantes.

(3) p. 2, ligne 7, après « Comme la configuration composée uniquement de 0 est toujours transformée en elle-même »] Cela n'est vrai que si, parmi les fonctions autorisées, décrites un peu plus loin (deuxième paragraphe de 1.3), on n'admet pas de « fixer le nombre » 1, c'est-à-dire de prendre la fonction constante 1. Mais ce n'est pas le cas dans les exemples de

la première figure de 1.3, et ce n'est pas cohérent avec le calcul du nombre maximal de fonctions pour $n = 3$. Le résultat énoncé (la longueur maximale d'un cycle est $2^n - 1$) est cependant correct, car une fonction « fixant 1 » ne peut pas arriver sur 0 donc donner un cycle incluant la configuration composée uniquement de 0.

(4) Au sens où les fonctions autorisées (voir note précédente) ne sont pas les mêmes que dans ce texte ; il y en a moins dans l'algorithme.

(5) Ces recherches pour $n = 5$ ne sont pas dans l'article.

(6) Le terme usuel en mathématiques est « permutation ».

(7) [p. 2, tout à la fin deuxième paragraphe du 1.3] Ce décompte devrait être détaillé, il est exact.

(8) Dans la dernière colonne de ce tableau, il n'y a pas 4×2 « branches transitoires » mais seulement 2, chacune reliant 4 configurations.