La multiplication des gâteaux

Clarence Guyodo, Elodie Perrotin, Yasmine BEL HAJ ALI, Clara Rini

Classe de 3e et 2nde

Année 2024-2025

Établissement : Lycée Français Vincent van Gogh, La Haye, Pays-Bas
Enseignant·e(s) : Florence Decool, Stéphane Béringue
Chercheur : Pierre Albert, Université d'Utrecht aux Pays-Bas

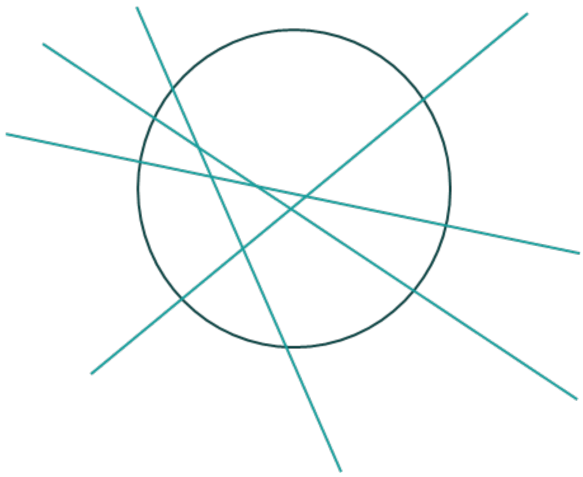
Table des matières

1 Présentation du sujet

Le sujet que nous avons reçu au début de l'année est le suivant : "Vous disposez de gâteaux et vous les coupez à l'aide d'un couteau dont la lame est toujours suffisamment grande. Combien de parts de gâteaux obtenez-vous au maximum ?"

1.1 Analyse du sujet

Ce que nous avons compris du sujet est que nous avons un nombre de gâteaux de formes variables noté N(1), un entier. Notre lame est rectiligne et infinie et notre but est d'utiliser un minimum de coupes pour obtenir un maximum de parts de tailles variables.



1.2 Notation

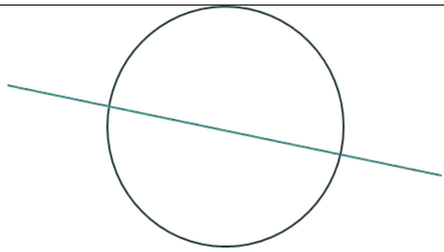
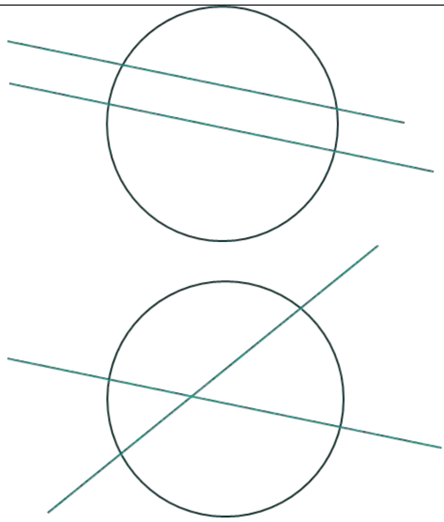
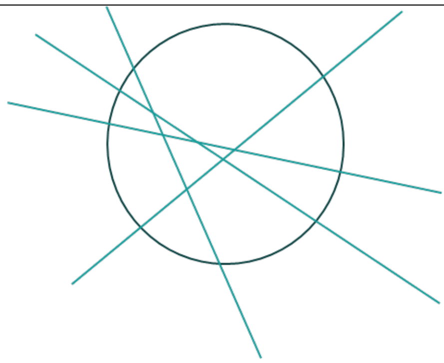
On notera :

- C : nombre de coupe , C est un entier positif
- P : nombres de part , P est un entier positif

(2)

2 Recherches et Formules

2.1 Modélisation

1 coupe		Maximum 2 parts
2 coupes		Maximum 4 parts
5 coupes		Maximum 11 parts

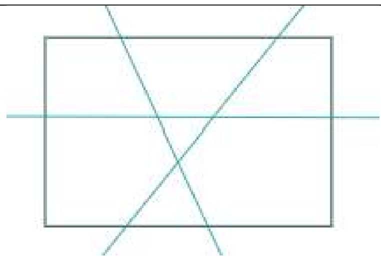
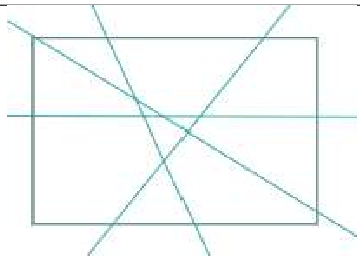
La première chose que nous avons faite est de représenter les gâteaux avec des cercles pour pouvoir modéliser un gâteau qu'on coupe. Les droites représentent les coupes(3).
Nous avons toujours cherché à avoir le maximum de parts donc même si avec deux coupes nous pouvons obtenir 3 parts, cela ne nous intéresse pas.

2.2 Formes

Nous avons répété le procédé avec des gâteaux de différentes formes et nous avons remarqué qu'il n'y avait pas de différence entre les gâteaux de forme ronde, rectangulaire, carrée ou triangulaire. Nous sommes donc restés avec les cercles.

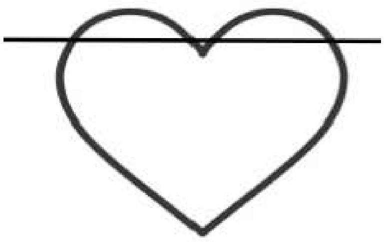
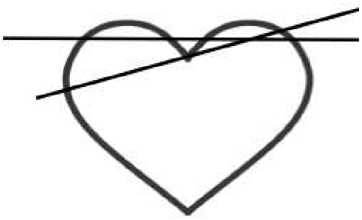
Il est important de noter que nous ne cherchons pas des parts de taille égale.

Avec des rectangles

3 coupes :		Maximum 7 parts
4 coupes :		Maximum 11 parts

Avec des coeurs

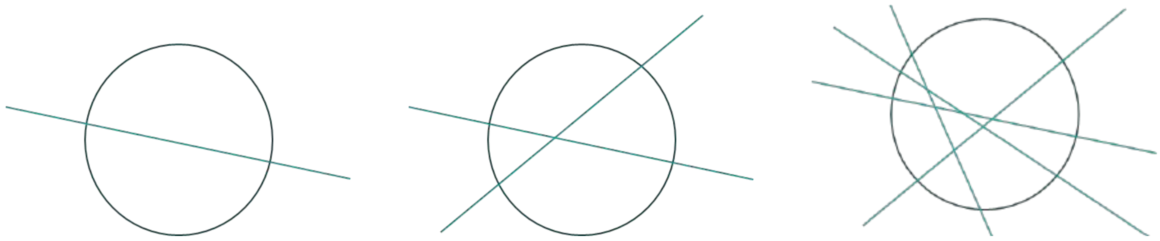
Cependant, pour les cœurs, nous n'avons pas obtenu les mêmes résultats donc nous ne nous sommes pas plus concentrés sur les gâteaux en forme de cœur(4).

1 coupe		Maximum 3 parts
2 coupes		Maximum 6 parts

Conclusion : pour la suite de nos recherches, nous avons uniquement travaillé sur les cercles

2.3 Formule de récurrence pour 1 gâteau

Lors de nos nombreuses recherches, nous avons réussi à trouver une formule de récurrence pour déterminer le nombre de parts maximum pour un nombre de coupe défini.



On a pu conjecturer la relation

$$P = \frac{C \times (C+1)}{2} + 1$$

Avec :

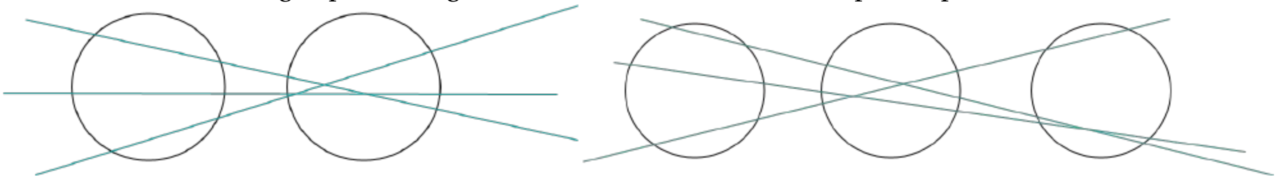
- C : nombre de coupe , C est un entier positif
- P : nombres de part , P est un positif

Voici les résultats sous la forme d'un tableau(5)

Nombre de coupes	Nombre de parts pour 1 gâteau	Formule
1	2	$\frac{1 \times (1+1)}{2} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$
2	4	$\frac{2 \times (2+1)}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$
3	7	$\frac{3 \times (3+1)}{2} + 1 = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7$
4	11	$\frac{4 \times (4+1)}{2} + 1 = \frac{20}{2} + 1 = 10 + 1 = 11$
5	16	$\frac{5 \times (5+1)}{2} + 1 = \frac{30}{2} + 1 = 15 + 1 = 16$
6	22	$\frac{6 \times (6+1)}{2} + 1 = \frac{42}{2} + 1 = 21 + 1 = 22$

2.4 Plusieurs gâteaux alignés

Ensuite, nous avons aligné plusieurs gâteaux à la suite et nous avons répété le processus.



Grâce à nos recherches, nous avons trouvé les valeurs suivantes :

Nombre de coupes	Nombre de parts 1 gâteau	Nombre de parts 2 gâteaux	Nombre de parts 3 gâteaux
1	2	4	6
2	4	7	10
3	7	11	15
4	11	16	21
5	16	22	28
6	22	29	36

On peut vérifier grâce aux formules que l'on a trouvées avec les observations suivantes.
Nous avons travaillé avec deux gâteaux. Nous avons pu observer un lien entre le nombre de parts maximum pour un gâteau et le nombre maximum de parts pour deux gâteaux. On observe que c'est comme si nous avions effectué une coupe en plus que pour 1 gâteaux.
Ceci nous a permis de trouver la formule :

$$\frac{(C+1)\times(C+2)}{2}+1$$

Ensuite nous avons travaillé avec trois gâteaux.Nous avons comparé le nombre de parts obtenues entre deux et trois gâteaux. Nous avons observé que c'est comme si nous avions effectué une coupe en plus que pour 2 gâteaux et retiré une part au résultat final.
Ce qui nous a permis de trouver la formule(6) :

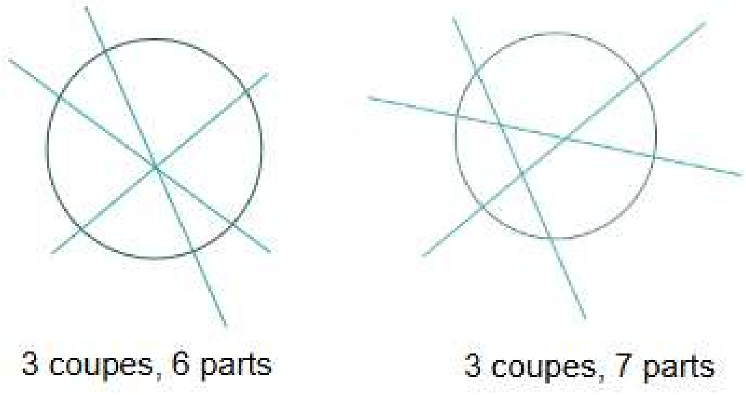
$$\frac{(C+2)\times(C+3)}{2}$$

	Formule du nombre de parts en fonction du nombre de coupes C	Exemple pour 3 coupes
Pour 1 gâteau	$\frac{C\times(C+1)}{2}+1$	$\frac{3\times(3+1)}{2}+1=\frac{12}{2}+1=6+1=7$
Pour 2 gâteaux	$\frac{(C+1)\times(C+2)}{2}+1$	$\frac{(3+1)\times(3+2)}{2}+1=\frac{20}{2}+1=10+1=11$
Pour 3 gâteaux	$\frac{(C+2)\times(C+3)}{2}$	$\frac{(3+2)\times(3+3)}{2}=\frac{30}{2}=15$

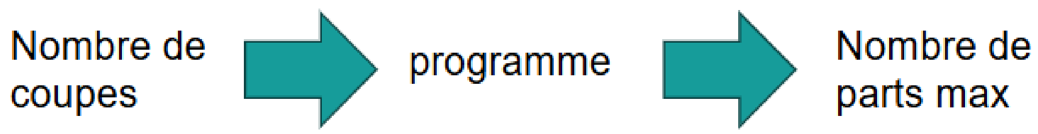
3 Programmes Scratch

3.1 Réponse à un besoin

Lorsque nous avons commencé à découper des cercles à la main pour essayer de trouver des liens : nous avons réalisé que cela prenait beaucoup de temps, ceci, même avec un nombre de coupes assez petit. Nous avons donc eu l'idée de créer un programme Scratch.

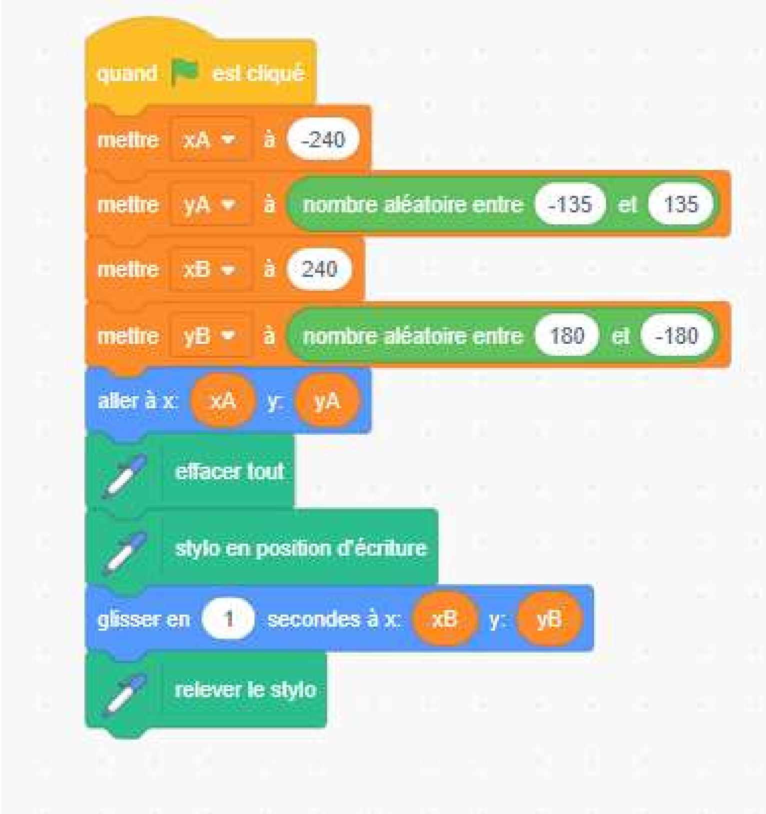


Le but du programme était de nous permettre de ne plus avoir besoin de prendre beaucoup de temps pour compter le nombre de parts durant nos recherches. Ainsi, il devait être capable de compter le nombre de parts maximum qu'il était possible d'obtenir avec un nombre de coupes défini. Il jouerait donc le rôle d'une fonction.



3.2 Démarche 1

Notre première idée était de définir un fond d'écran spécifique, en forme de cercle, puis de tracer des droites aléatoirement pour que Scratch compte ensuite le nombre de parts formées par ces droites. Il devait ensuite comparer les différents résultats obtenus avec le même nombre de parts et trouver le nombre maximum de parts possibles. Nous avons réussi à ce que Scratch construise des droites aléatoires grâce au programme ci-dessous.

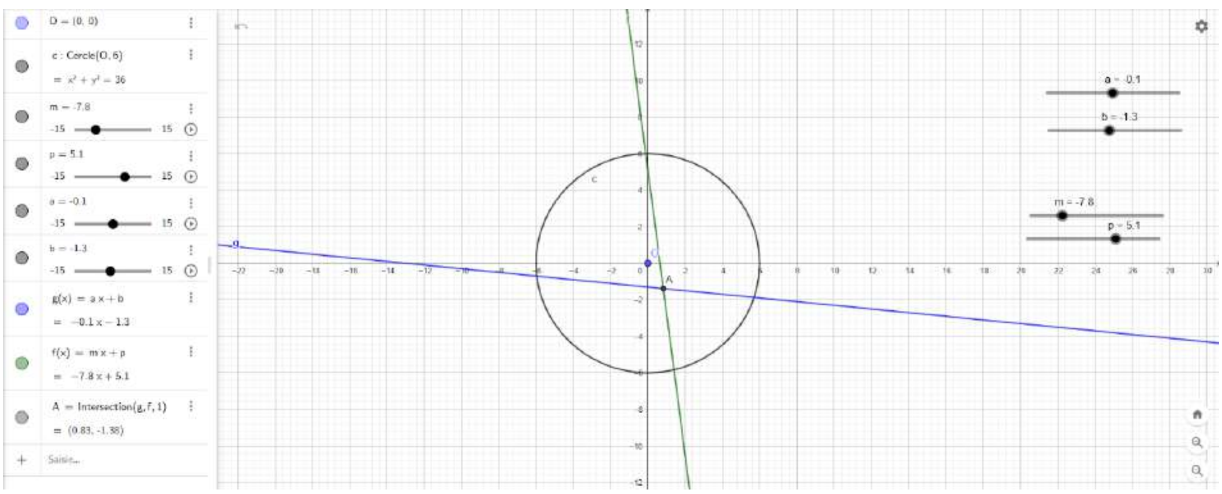


Cependant, nous nous sommes rendu compte que le programme ne pouvait pas identifier le fond d'écran, ce qui signifie qu'il ne pouvait également pas compter les parts. Nous avons fait part de ce problème à nos professeurs de Math-en-Jeans et ils nous ont proposé de faire des recherches sur le sujet de fonction affine. Ils nous ont expliqué que les fonctions affines pourraient permettre au programme de compter le nombre d'intersections.

Si nous trouvons des liens entre le nombre d'intersections et le nombre de parts, le programme scratch serait donc en mesure de pouvoir compter le nombre d'intersections. Ainsi, il pourrait aussi compter le nombre de parts.

3.3 Démarche 2 : Fonctions affines

Nous avons ainsi commencé les recherches sur les fonctions et avons représenté la fonction sur Geogebra pour arriver à la comprendre.



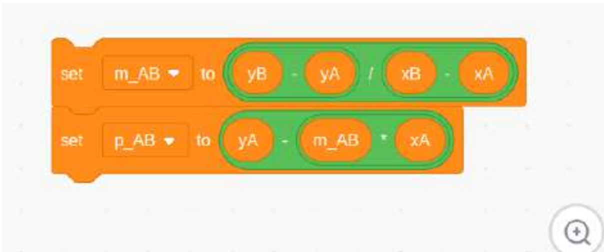
La fonction affine est représentée par une droite d'équation $y = mx + p$, elle permet de trouver à chaque abscisse x, l'ordonnée y correspondant à un point de cette droite.

On cherche donc à déterminer l'équation de droite passant par deux points A et B. Nos points sont choisis de façon aléatoire.
On va déterminer le coefficient directeur de cette droite :

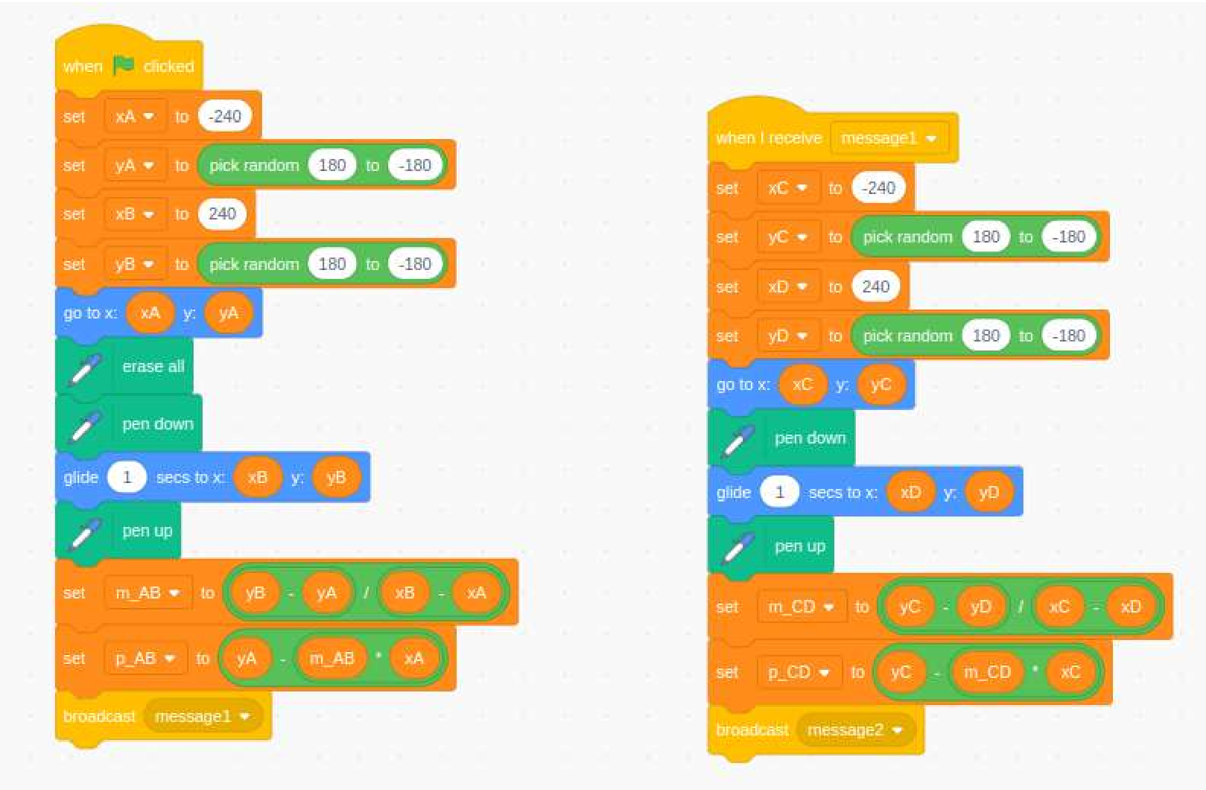
$$m_{(AB)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Après avoir trouvé m, il ne reste plus qu'à déterminer l'ordonnée à l'origine $p_{(AB)}$ en équation ce qui donne : $p_{(AB)} = y_A - m_{(AB)} x_A$.

On programme ainsi la création de points aléatoires et les calculs du coeffcient directeur et de de l'ordonnée à l'origine.



L'objectif est de déterminer le point d'intersection de deux droites.
On répète cela pour la deuxième droite (CD) ce qui donne au final :



Enfin, à partir de ces informations, il faut trouver I le point d'intersection des deux droites de coordonnées : $(x_I; y_I)$
On sait que ce point I appartient aux deux droites (AB) et (CD) alors im doit vérifier les deux équations $y_{(AB)}$ et $y_{(CD)}$.
On cherche l'abscisse x_I :

$$m_{(AB)} \times x_I + p_{(AB)} = m_{(CD)} \times x_I + p_{(CD)}$$

$$p_{(AB)} - p_{(CD)} = m_{(CD)} \times x_I - m_{(AB)} \times x_I$$

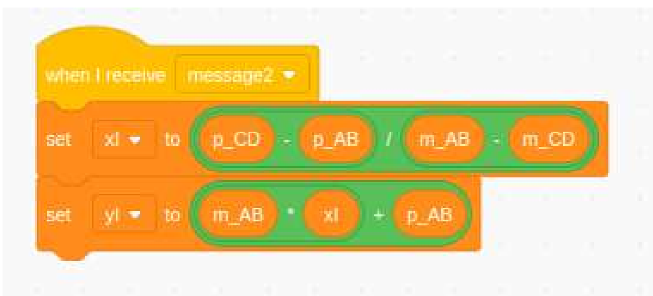
$$p_{(AB)} - p_{(CD)} = (m_{(CD)} - m_{(AB)}) \times x_I$$

$$x_I = \frac{p_{(AB)} - p_{(CD)}}{m_{(CD)} - m_{(AB)}}$$

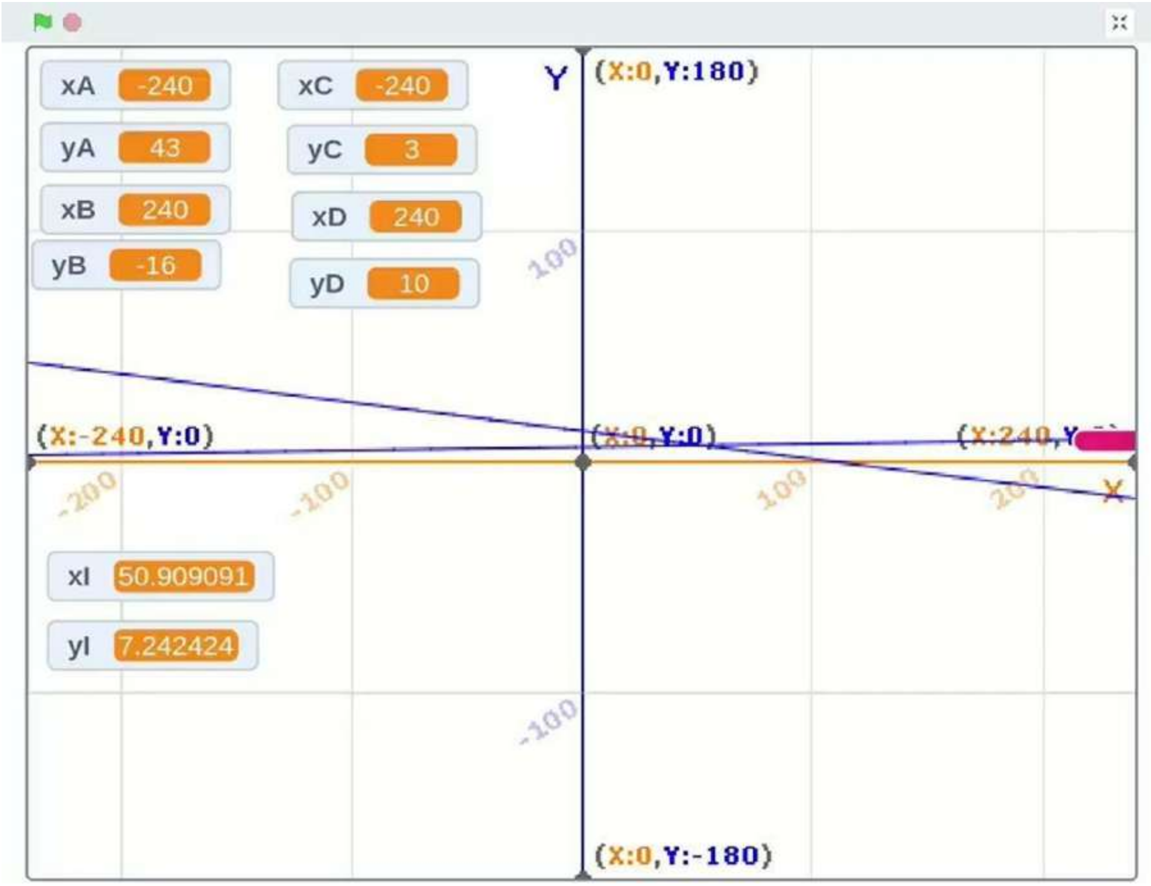
Puis on trouve l'ordonnée y_I :

$$y_I = m_{(AB)} \times x_I + p_{(AB)}$$

Pour résumer cela sur scratch :



Ainsi, le programme Scratch parvient à déterminer le point d'intersection de deux droites grâce aux fonctions affines. Voici un exemple de résultat :



Nombre de part par rapport au nombre d'intersection

Nous avons remarqué qu'il y a une relation entre le nombre de part et le nombre d'intersection. Nous avons observé que le nombre de parts pour un gâteau est égal au nombre de coupes plus le nombre d'intersections plus 1.

Nombre de coupes	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de point d'intersection	0	1	3	6	10	15	21
+1	1	1	1	1	1	1	1
Total : Nombre de parts	2	4	7	11	16	22	29

Nous avons supposé une formule qui ne peut pas être prouvée à notre niveau : $C + I + 1 = P$

Nous avons donc décidé d'arrêter le programme Scratch étant donné que nous n'avons pas pu prouver une relation entre le nombre de coupes et le nombre de points d'intersection.

4 Des parts aux coupes

Dans cette réflexion, nous avons cherché à établir une méthode permettant de déterminer le nombre de coupes C en fonction du nombre de parts P.
Nous sommes donc partis de notre formule de base qui nous donne le nombre de parts en fonction du nombre de coupes :

$$P = \frac{C \times (C+1)}{2} + 1$$

Ce qui devient :

$$P - 1 = \frac{C \times (C+1)}{2}$$

$$2(P-1) = C \times (C+1)$$

$$2(P-1) = C^2 + C$$

$$C^2 + C - 2(P-1) = 0$$

Nous reconnaissons une formule du second degré, nous avons donc exécuté la formule du second degré avec : $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2(p-1)$.
Pour trouver deux solutions : $C_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Nous gardons seulement le résultat positif car nous ne pouvons pas trouver un résultat négatif pour des parts(7) :

$$C_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2(P-1))}}{2 \times 1}$$

$$C_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \times (P-1)}}{2}$$

$$C_1 = \frac{-1 + \sqrt{8P - 8 + 1}}{2}$$

$$C_1 = \frac{-1 + \sqrt{8P - 7}}{2}$$

Grâce à cette équation les résultats que nous allons obtenir seront rarement entiers, puisqu'on ne peut pas effectuer un fragment de parts, il faut arrondir à l'unité supérieur. Par exemple si nous obtenons 5.001 avec cette formule nous dirons qu'il y a 6 coupes.

5 Conclusion

Cette expérience nous a montré que les mathématiques ne se limitent pas aux exercices classiques, mais qu'elles peuvent aussi servir à résoudre des problèmes originaux et amusants. Elle nous a aussi donné un aperçu du travail de recherche mathématique : poser des questions, chercher, tester, se tromper… et progresser petit à petit!

Notes d'édition

(1) N est ici le nombre de gâteaux.

(3) Comment peut on être sûr·e qu'on a bien obtenu le nombre maximal de part de gâteau ?

(4) On peut remarquer ici que la figure du coeur n'est pas convexe : le segment qui joint deux points du coeur n'est pas toujours contenu dans le coeur.

(5) Ce tableau donne le nombre maximal de parts mais seulement si la conjecture est vraie. Elle n'est pas ici démontrée.

(6) Ces deux dernières formules sont des conjectures que les auteurs font à la suite des résultats de leur recherche. Comme pour la conjecture pour un seul gâteau, elles ne sont pas démontrées.

(7) Le nombre de part est un entier a priori : il s'agit ici du nombre de coupes (C), qui lui aussi est un entier.

(2) Cet article est très interessant même si il n'y a pas de résultats mais seulement des conjectures. Il permet de comprendre la démarche des auteurs et comment il et elles en sont arrivé·es à ces conjectures.