

# Nids d'aigles

Année 2024 – 2025

CHHOUN Chan Serey Vathana, DUBOST Charles-Emmanuel, HADENGUE Joséphine,  
LALANDE Clarisse, MALLET Lucie, ROYMARGUERITAT Ange, YAZIDI Inès.

Établissement : Lycée Marguerite de Navarre, Bourges.

Enseignant-e(s) : M.Créchet, Mme Herminier, M. Pelletier.

Chercheur-Chercheuse(s) : L.Besnier, X.Bultel, A.Lefebvre, B.Nguyen du LIFO de l'INSA  
Centre Val de Loire.

---

## Sommaire

---

- 1-Présentation du sujet
- 2-Problématique
- 3-Définition des termes
- 4-Couronne
- 5-Généralisation à une montagne
- 6-Histoire d'angles
- 7-Stratégie gloutonne
- 8-Programme

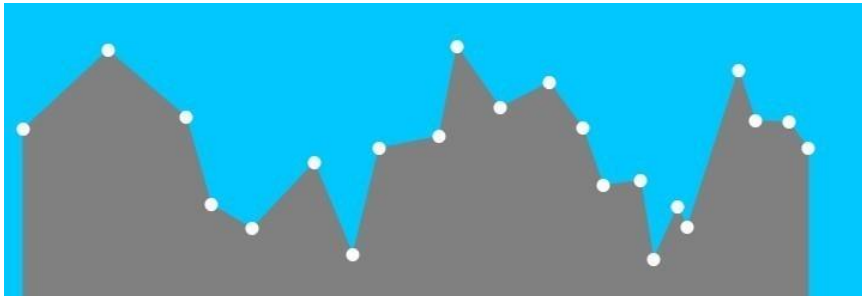
## 1-Présentation du sujet

---

On a dans un repère, une ligne brisée qui représente la silhouette d'une montagne sur laquelle chaque sommet est un nid d'aigles (on parlera de **point** dans la suite).

On dispose de plusieurs aigles, qui doivent surveiller tous les nids. Chaque aigle possède une vision sur une distance illimitée et à  $360^\circ$  autour de lui sauf lorsqu'une montagne lui bloque la vue. Les aigles doivent être obligatoirement posés sur un nid.

Exemple de montagne avec des nids:



## 2-Problématique :

---

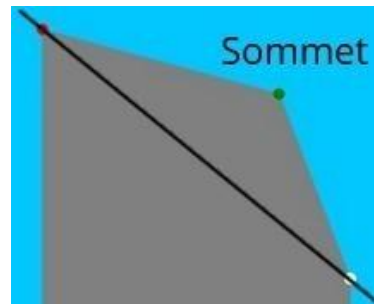
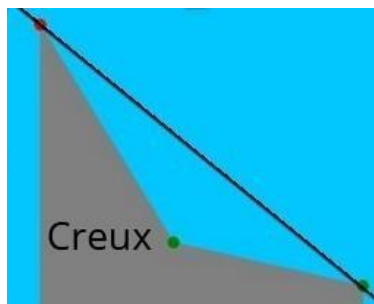
**Combien d'aigles faut-il au minimum pour surveiller tous les nids d'une montagne ?**

## 3-Définition des termes

---

→ Sur les images utilisées ci-dessous, les aigles sont représentés par des points rouges, les nids surveillés par des points verts et ceux qui ne le sont pas sont en blanc.

Pour déterminer si un point est un **creux** ou un **sommet**, on imagine un segment entre les 2 points qui l'encadrent. Si le point du milieu est en dessous de ce segment c'est un creux, dans le cas contraire c'est un sommet.



Cas particuliers:

Pour les deux extrémités de la chaîne de montagne, nous regardons par rapport au point suivant (pour le point de départ) et au point précédent (pour le point d'arrivée). Si le point à l'extrémité est au dessus de son point adjacent alors ce sera un sommet sinon ce sera un creux.

## 4-Couronne

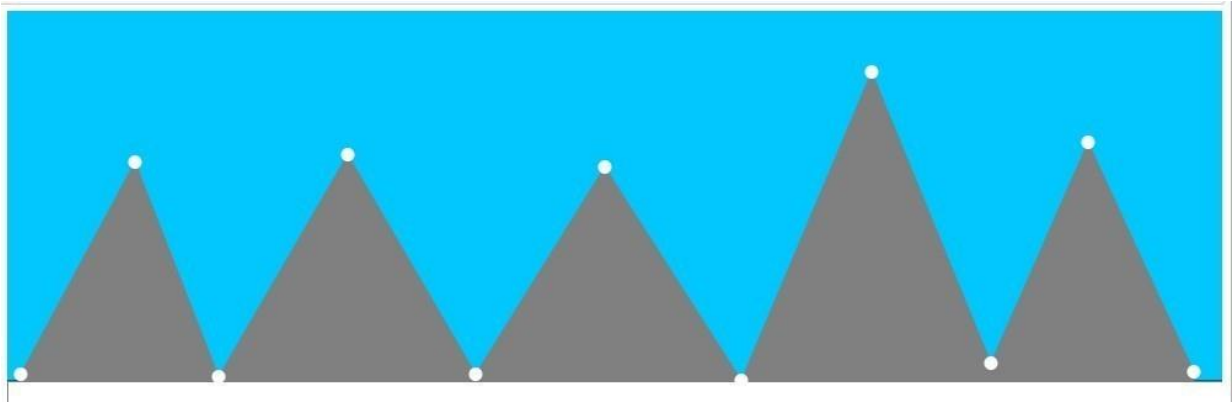
---

### 1 - Définition d'une couronne

Définition :

- On dira qu'une chaîne de montagne est en configuration **couronne** lorsque pour un point donné : s'il s'agit d'un creux, alors les points adjacents sont des sommets ; s'il s'agit d'un sommet, alors les points adjacents sont des creux.

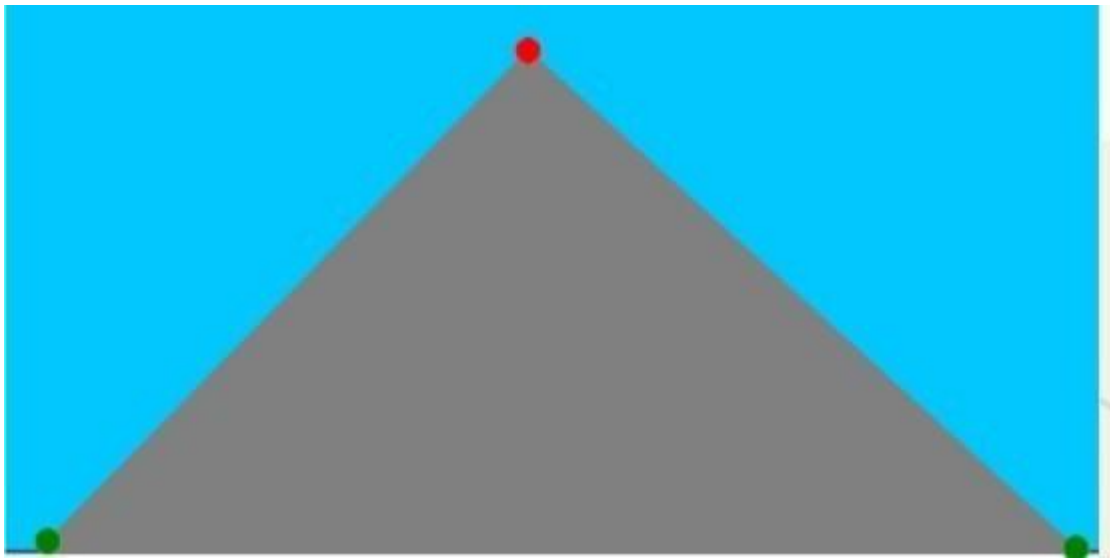
Exemple de couronne :



## 2 - Étude de cas simples de couronnes

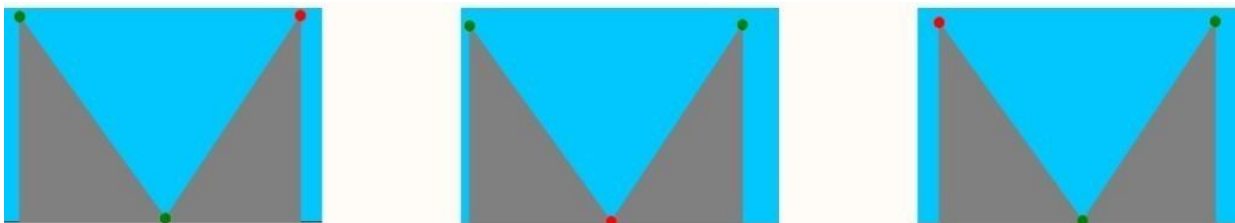
### a - Configuration à 3 points

- 2 creux et 1 sommet :



Il faut placer l'aigle sur le sommet, on est sûr ainsi qu'il peut voir tous les nids.

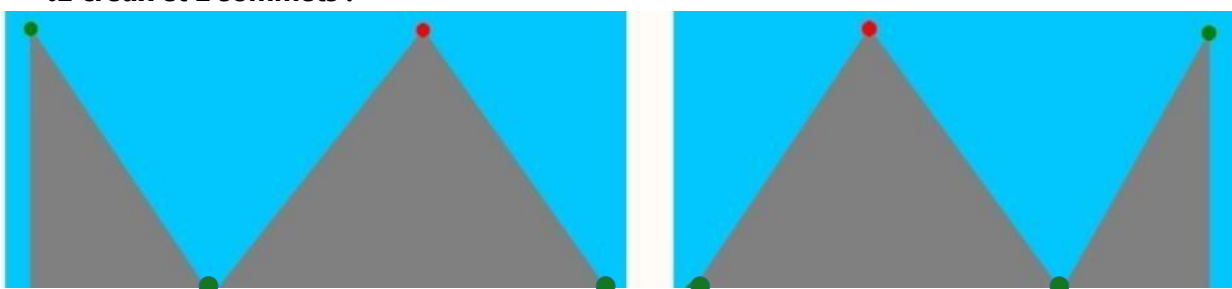
- 1 creux et 2 sommets :



1 aigle est nécessaire et suffisant. On peut le placer sur tous les nids, peu importe la configuration.

### b - Configuration à 4 points

- 2 creux et 2 sommets :



1 aigle est nécessaire et suffisant. On le place sur le sommet situé entre les deux creux.

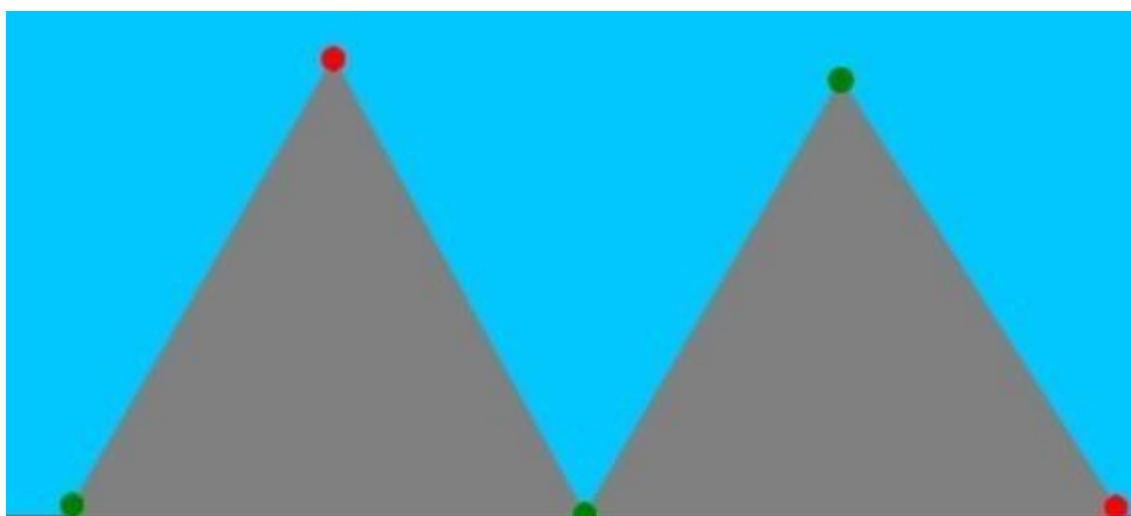
### c - Configuration à 5 points

- 2 creux et 3 sommets :



1 aigle est nécessaire et suffisant et il faudra placer l'aigle sur le sommet du milieu.

- 3 creux et 2 sommets :



2 aigles sont suffisants et il faut placer les aigles sur le premier sommet et le dernier creux (1). Les deux aigles ne sont pas nécessaires pour toutes les configurations à 3 creux et 2 sommets. En effet, l'aigle sur le 1er sommet pourrait voir le dernier creux si le 2ème sommet est suffisamment bas.

### 3-Formule pour la configuration couronne

Pour déterminer une formule, nous avons commencé par étudier la configuration de couronne de manière progressive, en observant le nombre de sommets (noté  $S$ ) et le nombre d'aigles **majorant** (suffisant mais pas nécessairement optimal) pour voir tous les nids (noté  $A$ ).

Pour cela, nous avons utilisé en particulier les résultats pour une montagne avec 2 creux et 2 sommets où un aigle sur un sommet suffit. Nous avons ainsi établi un tableau pour enregistrer ces deux éléments, en partant d'une configuration avec un seul sommet jusqu'à une configuration avec neuf sommets.

Nous avons donc obtenu les résultats suivants (2):

| Nombre de sommets (S) | Nombre d'aigles majorant (A) |
|-----------------------|------------------------------|
| 1                     | 1                            |
| 2                     | 2                            |
| 3                     | 2                            |
| 4                     | 3                            |
| 5                     | 3                            |
| 6                     | 4                            |
| 7                     | 4                            |
| 8                     | 5                            |
| 9                     | 5                            |

Ce tableau met en évidence une relation particulière entre les deux éléments, ce qui nous permet de formuler la conjecture suivante :

Conjecture :

\*Il semblerait que  $S$  et  $A$  vérifie la formule :  $A = \lfloor S/2 \rfloor + 1$  où  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est la fonction "partie entière".

#### 4-Procédé pour placer les aigles

Règle générale — Si  $S$  est impair : on place les aigles un sommet sur deux (en partant du premier).  
— Si  $S$  est pair : on suit la même méthode, mais on ajoute un dernier aigle sur le dernier creux.

#### 5-Exemples

##### 5.1 Cas où $S$ est impair

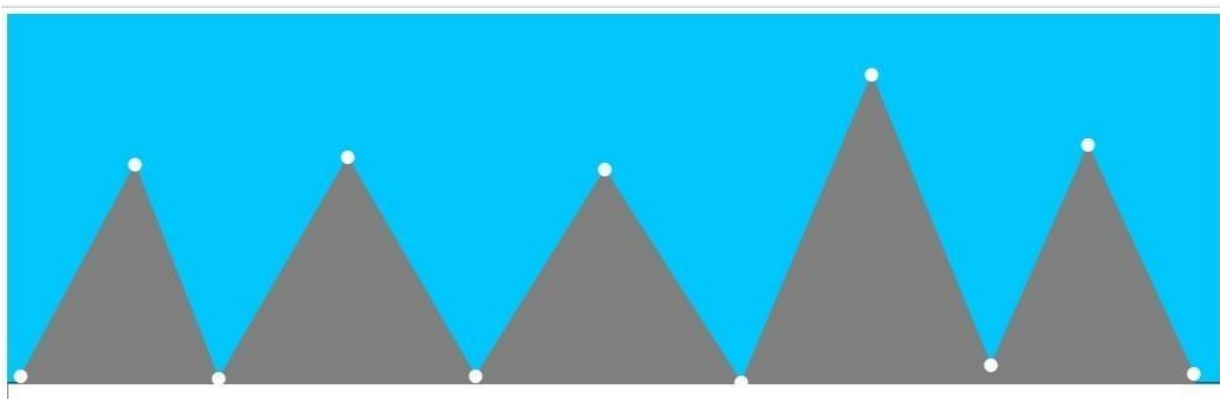


Figure 1 – une configuration de couronne présentant 5 sommets

Nous avons une configuration de couronne qui présente 5 sommets, nous allons appliquer la formule suivante :

$$A = \lfloor 5/2 \rfloor + 1 = 3$$

Donc nous avons besoin de 3 aigles pour que tous les nids présents sur la montagne soient surveillés.

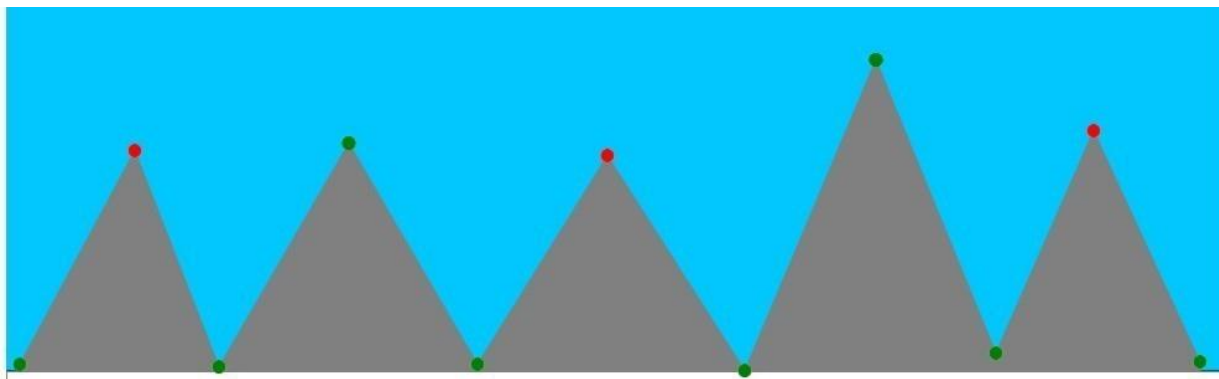


Figure 2 – une configuration couronne présentant 5 sommets traitée en appliquant le procédé

### 5.2 Cas où S est pair

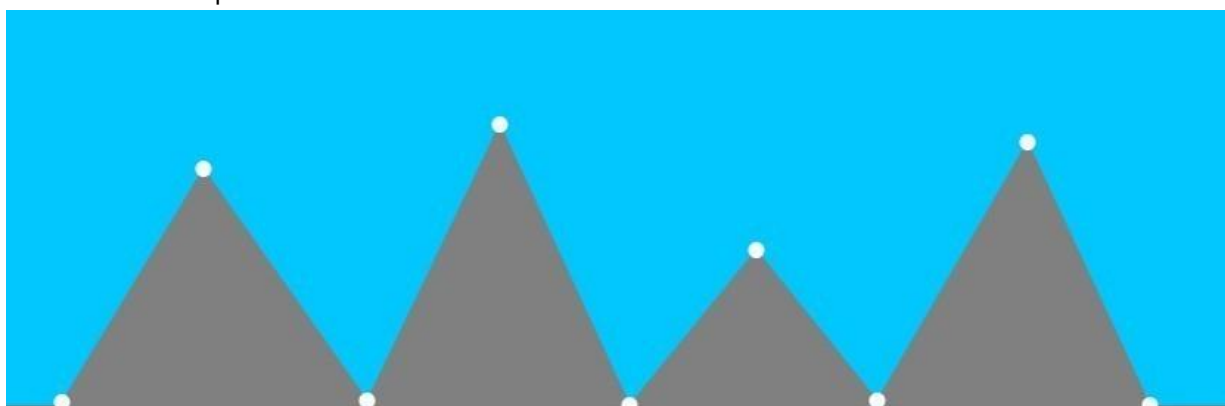


Figure 3 – une configuration de couronne présentant 4 sommets

Nous avons une configuration de couronne qui présente 4 sommets, nous allons appliquer la formule suivante :

$$A = \lfloor 4/2 \rfloor + 1 = 3$$

Donc nous avons besoin de 3 aigles pour que tous les nids présents sur la montagne soient surveillés.

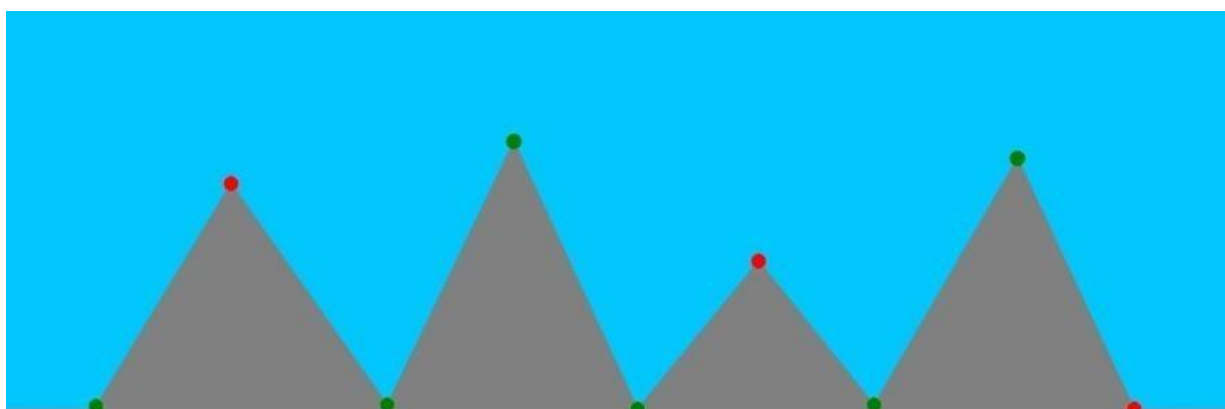


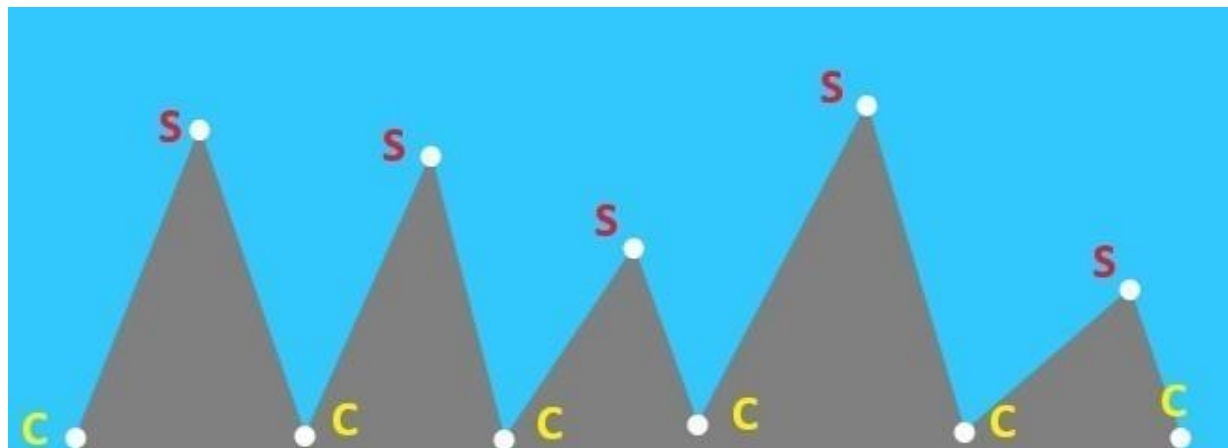
Figure 4 – une configuration couronne présentant 4 sommets traitée en appliquant le procédé

# 5-Généralisation à une montagne

## La configuration de couronne

Afin de rendre l'étude plus accessible, nous avons d'abord restreint notre attention aux configurations "couronnes".

C-S-C-S-C ...



## Expérimentation : impact de l'ajout de points

Nous avons testé notre méthode en modifiant les configurations de couronnes :

### A. Ajout de creux

Lorsqu'on insère des creux supplémentaires entre les sommets d'une couronne, le nombre d'aigles nécessaires reste inchangé.

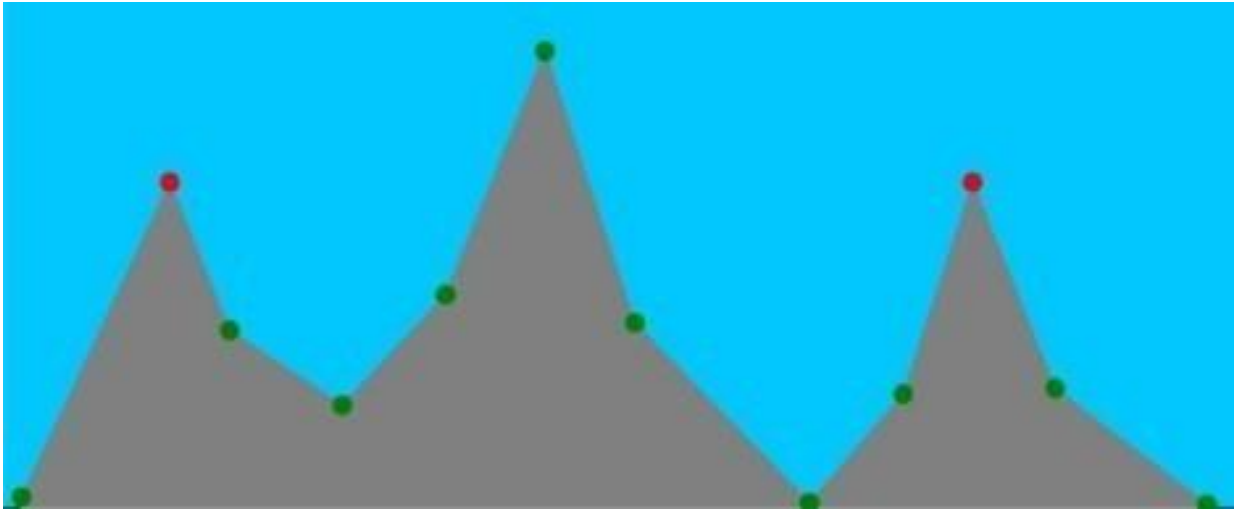
Cela s'explique par le fait que les aigles sont toujours placés sur les sommets, ce qui leur donne une vision directe sur les creux environnants. Peu importe le nombre de creux entre deux sommets : les aigles, en étant en hauteur, peuvent toujours couvrir tous les nids situés de part et d'autre. (3) On peut donc ignorer les creux dans le raisonnement sur le nombre d'aigles à placer.

Prenons l'exemple illustré ci-dessous :



Nous avons une couronne régulière composée de 7 points.

En plaçant un aigle sur un sommet sur deux, en commençant par le premier, on constate que 2 aigles suffisent à surveiller tous les nids (les points rouges représentent les aigles ; tous les points rouges et verts sont donc bien surveillés).



Nous avons repris exactement la même configuration, mais nous avons ajouté 5 creux supplémentaires entre les sommets initiaux.

Malgré cette modification, les mêmes 2 aigles suffisent toujours à surveiller tous les nids. (3)

## B. Ajout de sommets

Deux cas sont à distinguer :

- Ajout de sommets adjacents aux sommets existants portant un aigle : on observe que certains nids ne sont plus couverts. Ces nouveaux sommets perturbent la visibilité. On les appelle **sous-sommets** et ils rendent dans ce cas précis le sommet principal impropre au placement d'un aigle. Il faut donc éviter de placer un aigle sur un sommet possédant un sous-sommet.
- Ajout de sommets adjacents aux sommets existants ne portant pas d'aigle : tant que ces nouveaux sommets, appelés également **sous-sommets**, ne bloquent pas la vue des aigles déjà en place, le nombre d'aigles ne change pas.

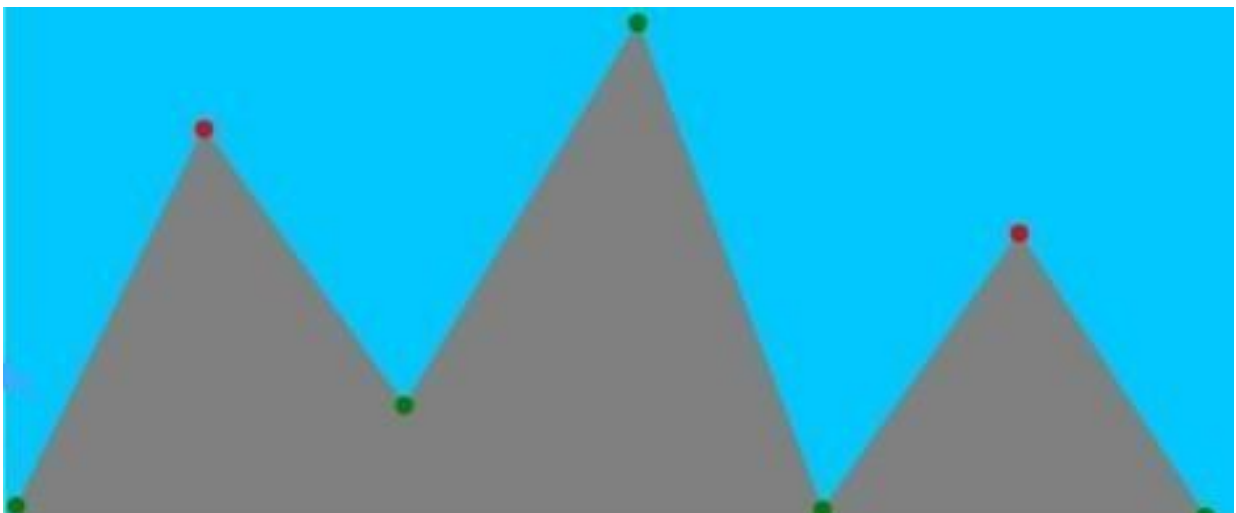
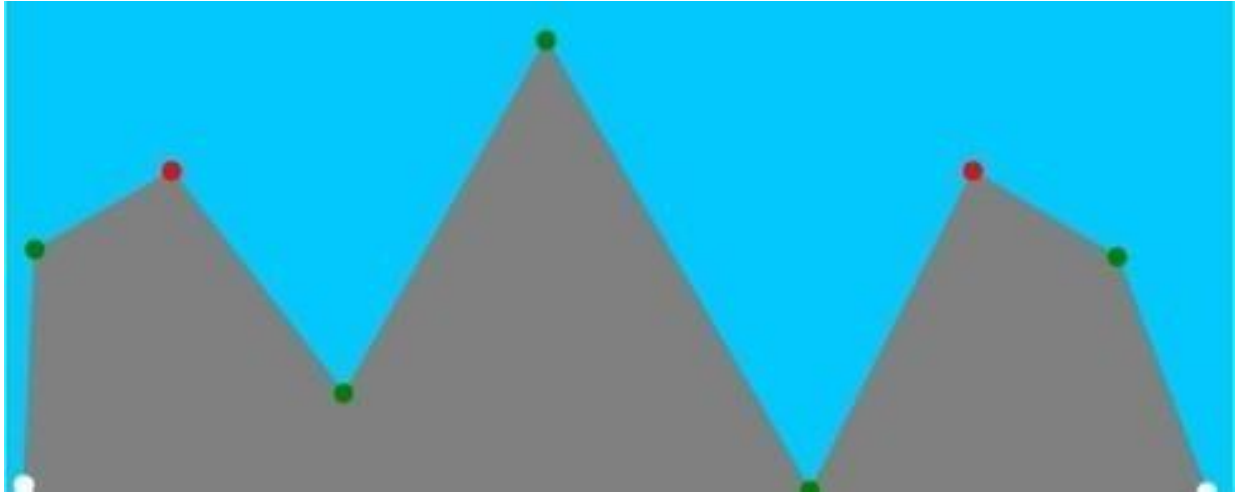


Illustration: On part d'une configuration initiale couronne de 7 points, déjà utilisée précédemment.

Deux aigles, placés un sommet sur deux en commençant par le premier, permettent de surveiller efficacement tous les nids (représentés en rouge et vert).

### 1. Ajout de sous-sommets sur les sommets existants portant un aigle



On modifie cette même configuration en ajoutant deux nouveaux sommets, chacun positionné à côté d'un sommet initial qui porte un aigle.

Il en résulte que certains nids ne sont plus couverts (points blancs visibles sur l'image).

Ces nouveaux sommets agissent comme des obstacles visuels pour les aigles en position, réduisant leur champ de vision.

Ces sommets sont donc des sous-sommets gênants, car ils rendent le sommet principal inefficace dès qu'un aigle y est placé.

Il faut donc éviter de placer un aigle sur un sommet qui possède un sous-sommet en contrebas, car cela limite sa capacité de surveillance.

### 2. Ajout de sous-sommets sur les sommets existants ne portant pas d'aigle

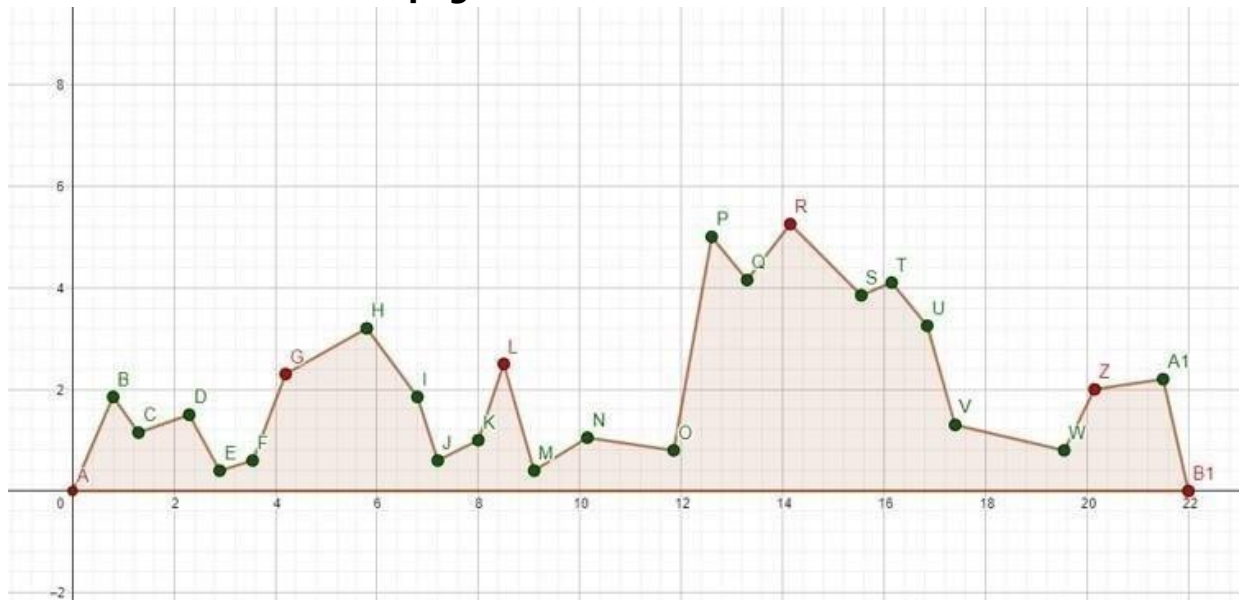


Ici, on ajoute également deux nouveaux sommets, mais cette fois adjacents à un sommet ne portant pas d'aigle et donc face à des sommets comportant déjà des aigles (le pic central est alors modifié).

Cette fois-ci, tous les nids restent bien surveillés. Les deux aigles déjà en place suffisent toujours, car les nouveaux sommets ne bloquent pas leur champ de vision. (4)

Ainsi, lorsque l'on ajoute des sommets sur un pic n'ayant pas d'aigle à son sommet, on constate que ceux-ci ne gênent pas la visibilité des aigles. Le nombre d'aigles nécessaires ne change pas.

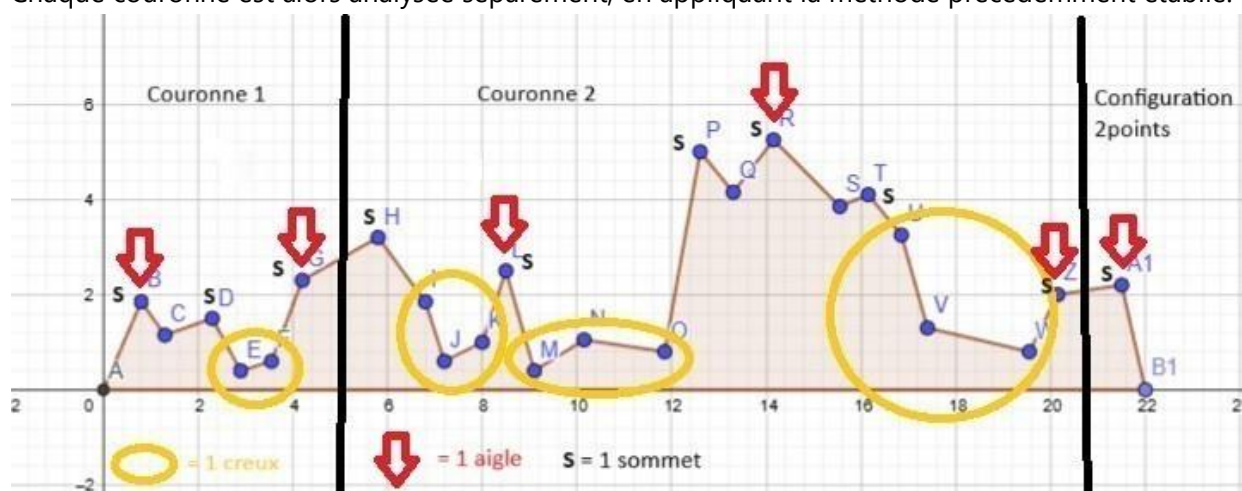
### C. Généralisation : découpage en couronnes



Lorsqu'on traite une chaîne de montagne quelconque, l'idée est de découper la ligne brisée en sous-ensembles réguliers de type couronne. Ce découpage se fait de la manière suivante :

- On parcourt la chaîne en appliquant la règle "un sommet sur deux".
- Tant que les points suivent l'alternance creux-sommet, on continue.
- Dès que deux sommets se succèdent sans creux entre eux, et que le deuxième possède une hauteur supérieure, on procède à un découpage, car cela rompt le motif régulier de la couronne.

Chaque couronne est alors analysée séparément, en appliquant la méthode précédemment établie.



#### Cas particuliers sur la figure ci-dessus:

## 1. Le point $N$

Dans l'image représentant une montagne réelle, le point  $N$  est un sommet. Toutefois, nous faisons le choix de ne pas le considérer comme tel dans le raisonnement. Pourquoi ?

"Lorsqu'un sommet est encadré de creux situés eux-mêmes dans une zone visuellement dominée par des sommets plus élevés, ce sommet intermédiaire peut être négligé dans l'analyse, à condition que sa surveillance soit assurée par des aigles voisins." (5)

Autrement dit, le sommet  $N$  est considéré comme un faux sommet ou un sommet masqué, car sa surveillance est déjà assurée par un aigle placé à proximité, comme celui positionné sur le sommet  $L$ . Il devient alors inutile d'y placer un aigle supplémentaire.

## 2. Les points $I$ et $U$

Dans l'analyse de la chaîne de montagnes, les points  $I$  et  $U$  ne sont pas considérés comme des sommets à part entière, car ils jouent en réalité le rôle de sous-sommets.

- Le point  $I$  est un sous-sommet du sommet  $H$ .
- Le point  $U$  est un sous-sommet du sommet  $T$ .

Ces sous-sommets perturbent la visibilité lorsqu'un aigle est placé sur le sommet principal qu'ils accompagnent.

En effet, un sommet qui possède un sous-sommet juste avant ou juste après perd de son efficacité : un aigle placé dessus ne peut plus surveiller correctement tous les nids alentour, car sa vision est bloquée.

Ainsi, conformément à la règle observée précédemment :

- On ne place jamais d'aigle sur un sommet qui possède un sous-sommet.
- On ne place pas d'aigle sur un sous-sommet non plus, car ce n'est pas un point stratégique de surveillance.

Les points  $I$  et  $U$  sont donc ignorés à la fois dans le comptage des sommets pour la règle "un sommet sur deux" et dans le placement des aigles. Ils ne déclenchent aucun découpage, car ils ne rompent pas la régularité, mais doivent être tout de même analysés pour éviter une erreur de placement.

## D. Conclusion : stratégie et bilan

La méthode des couronnes permet d'établir une stratégie fiable pour surveiller les nids avec un nombre suffisant d'aigles :

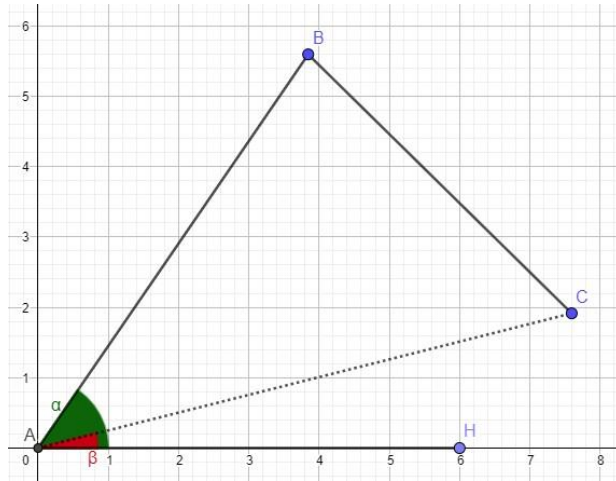
- Ignorer les creux dans le placement.
- Placer les aigles un sommet sur deux, sauf s'il existe des sous-sommets, auquel cas on évite ce sommet.
- Découper la montagne en couronnes dès qu'on détecte deux sommets successifs.
- Le placement des aigles dépend directement du nombre de sommets.

Cette méthode fournit un majorant efficace du nombre d'aigles nécessaires et peut être adaptée à toute montagne, même irrégulière.

# 6-Histoire d'angles

Maintenant, on ne s'occupe plus des sommets et des creux mais ouvrons une nouvelle perspective de recherche à partir de comparaisons d'angles sur une étude de 3 points extraits de la configuration de départ.

On a défini 2 angles à partir des 3 points de l'étude et d'un point situé sur l'horizontale qui passe par A, sachant que l'on positionne toujours un angle sur le 1er point, appelé A (celui à gauche):



- angle alpha ( $\alpha$ ) = angle entre l'aigle, le deuxième point (B) et un point de la droite horizontale passant par A.
- angle beta ( $\beta$ ) = angle entre l'aigle, le troisième point (C) et un point de la droite horizontale passant par A.

**BUT**

*Le but est de comparer ces 2 angles à l'aide de notre propriété (qui a été établie grâce à une étude de cas généralisée) afin de déterminer si l'aigle voit ou non le 3ème point C de notre étude à 3 points.*

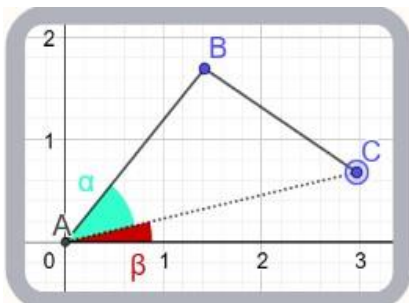
Propriété des angles :

- Si  $\alpha > \beta$  alors l'aigle ne voit pas le troisième point ;
- Si  $\alpha < \beta$  ou  $\alpha = \beta$  alors l'aigle voit le troisième point.

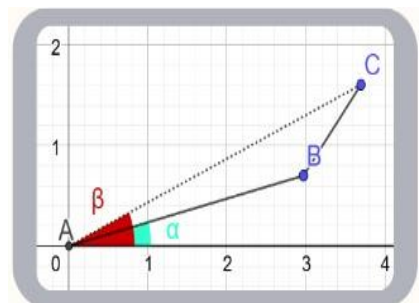
Attention : on considère les angles positifs ET négatifs !

On peut généraliser toutes les positions des 3 points en 7 cas différents:

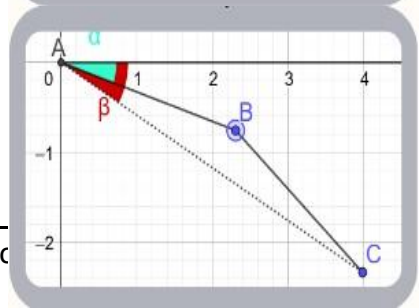
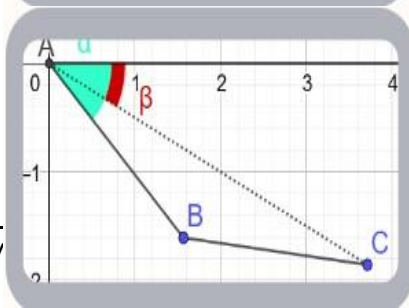
Exemples:

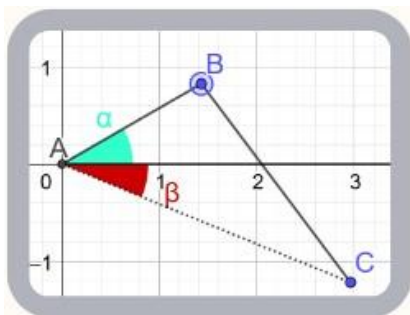


A gauche,  $\alpha > \beta$  donc l'aigle en A ne voit pas le point C.

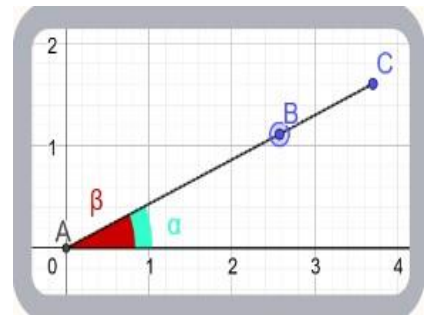


A droite,  $\alpha < \beta$  donc l'aigle voit le point C.

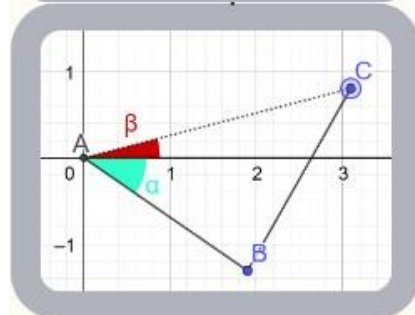




A gauche,  $\alpha < \beta$  donc l'aigle en A voit le point C.  
 A droite,  $\alpha > \beta$  donc l'aigle ne voit pas le point C.  
 A gauche,  $\alpha > \beta$  donc l'aigle en A ne voit pas le point C.



A droite,  $\alpha = \beta$  donc l'aigle voit le point C.



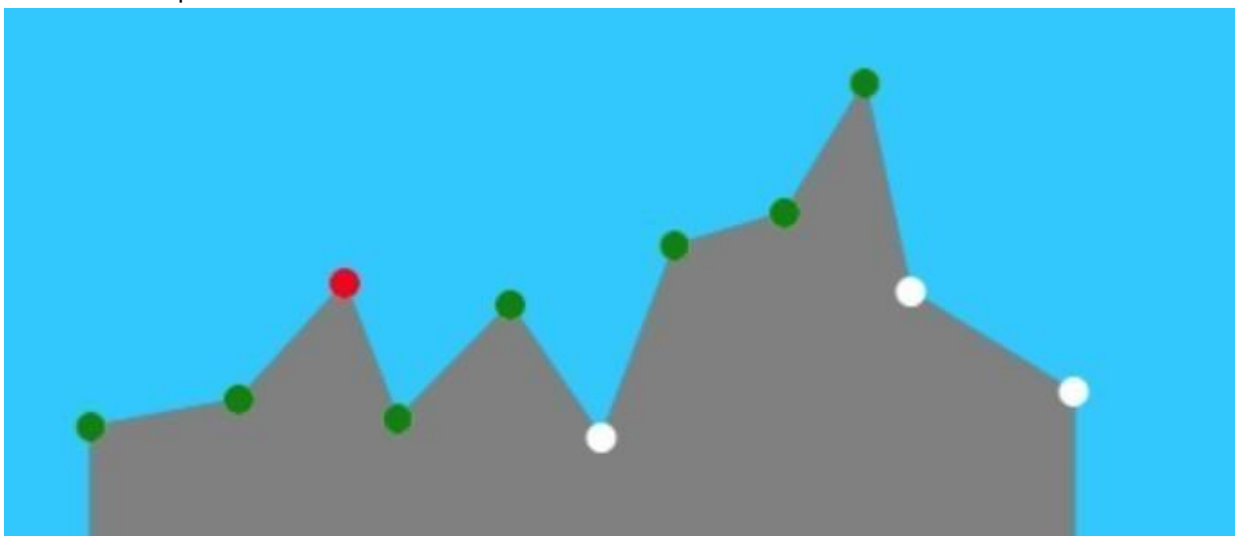
Ici,  $\alpha < \beta$  donc l'aigle en A voit le point C.

## 7-Stratégie gloutonne

Nous avons pensé à une autre stratégie pour placer nos aigles. Celle-ci dit qu'il faut commencer par placer un aigle sur le nid qui peut surveiller le maximum de nids de la montagne. Ensuite, le deuxième aigle doit être placé sur un nid où il peut voir le plus de nids restants c'est-à-dire non encore surveillés. On répète l'opération jusqu'à ce que tous les nids soient surveillés.

Une telle stratégie est appelée **stratégie gloutonne**.

Voici un exemple :



On a placé le premier aigle sur le 1er sommet car cet aigle voit le plus de nids soit 8 nids. Ensuite il faut placer le 2ème nid sur le dernier ou avant dernier point et enfin le 3ème aigle sur le 4ème creux.

## 8-Programme

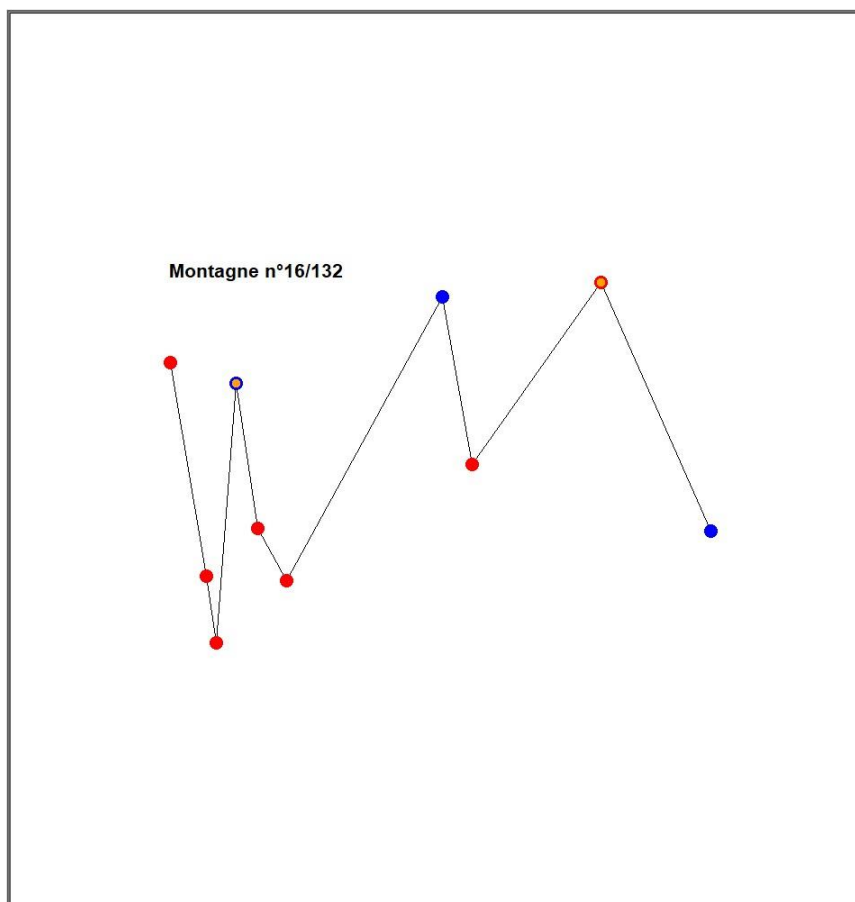
(6) Ainsi, nous pouvons lui demander de créer aléatoirement un certain nombre de montagnes (par exemple 100) avec un certain nombre de points (par exemple 10) et de tester la stratégie sur ces montagnes pour arriver à un nombre d'aigles minimal.

Pour vérifier si cette méthode avec la stratégie gloutonne était optimale, nous avons testé toutes les combinaisons possibles (stratégie par **force brute**) et comparé le nombre d'aigles obtenu à celui obtenu avec la stratégie **gloutonne**. Nous avons trouvé avec le programme qu'elle fonctionne dans 86% des cas. En effet, nous avons testé beaucoup de fois sur 1000 montagnes possédant 10 nids chacun. La plupart des résultats positifs pour le programme étaient : 838 réussites ; 872 réussites ; 846 réussites, ainsi de suite. Cela nous donne en moyenne 861 réussites sur 1000 montagnes, justifiant la réussite de 86%.

Ensuite, le code, à l'aide des générations des milliers de montagnes, nous affiche les montagnes où l'algorithme glouton n'est pas optimal. Nous avons donc étudié les différents cas qui ne marchaient pas pour savoir pourquoi notre technique n'obtenait pas la meilleure réponse. Nous nous sommes rendus compte que le programme se trompait souvent lorsqu'il tombait sur 2 points qui voient le même nombre de nids.

En effet, puisque nous utilisons un programme glouton, lorsqu'il tombe sur 2 points qui voient le même nombre de nids, alors le choix a été fait de prendre le dernier point (dans l'ordre des abscisses) qui en voit le plus.

Exemples:

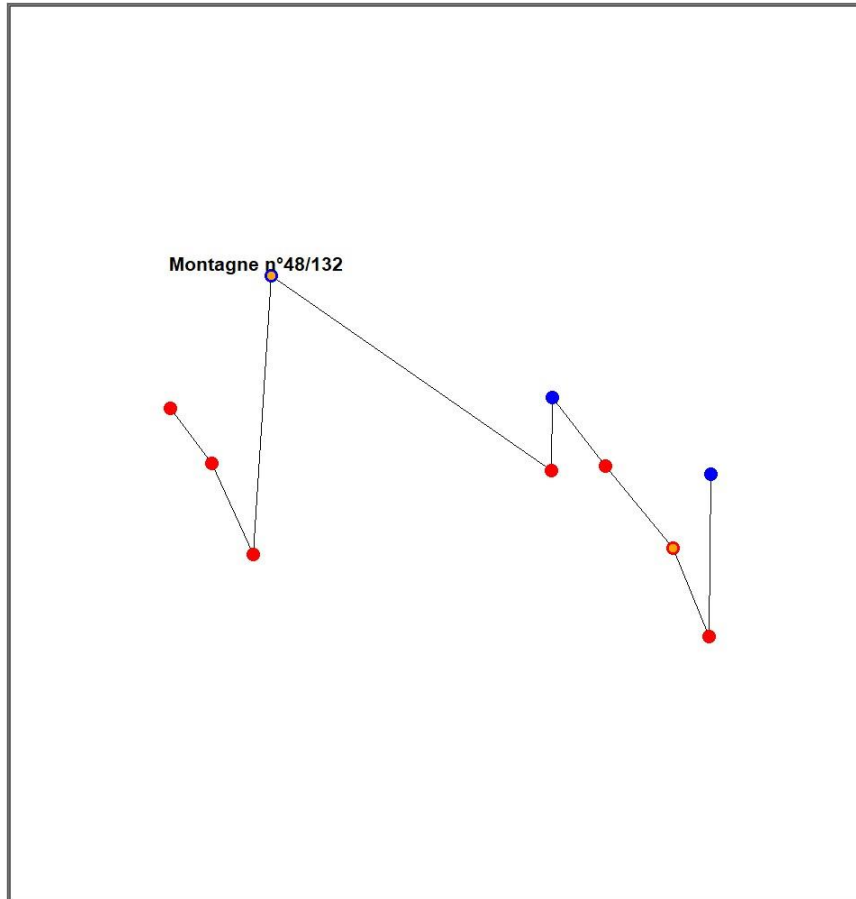


Ici notre programme a généré une montagne de 10 points. Les points rouges sont les nids surveillés, les points bleus représentent les points où notre programme glouton a placé les aigles,

et les points jaunes représentent le meilleur placement possible pour ce cas en ayant testé toutes les possibilités.

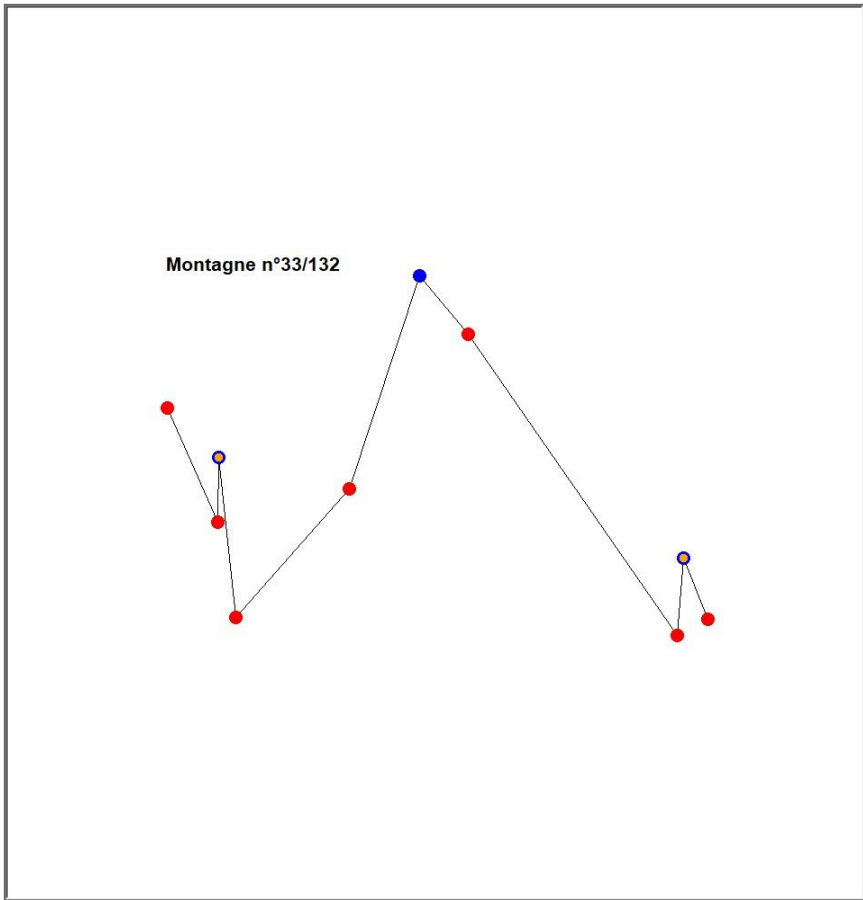
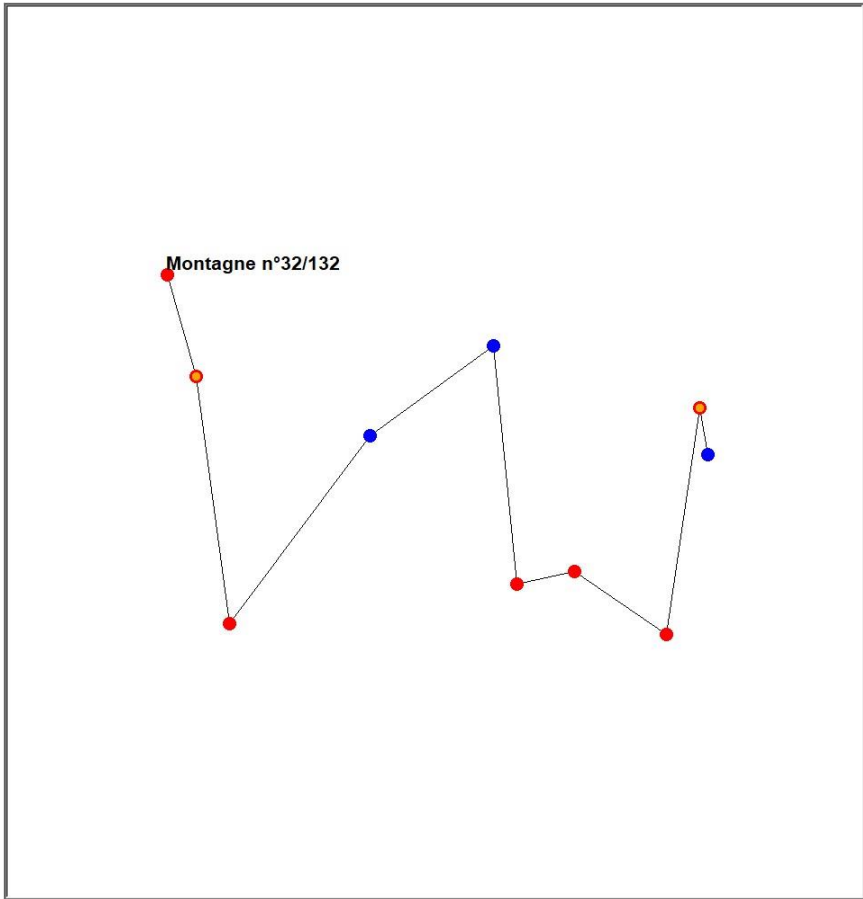
Dans ce cas, les points n°4 et n°7 voient tous les deux 7 nids.

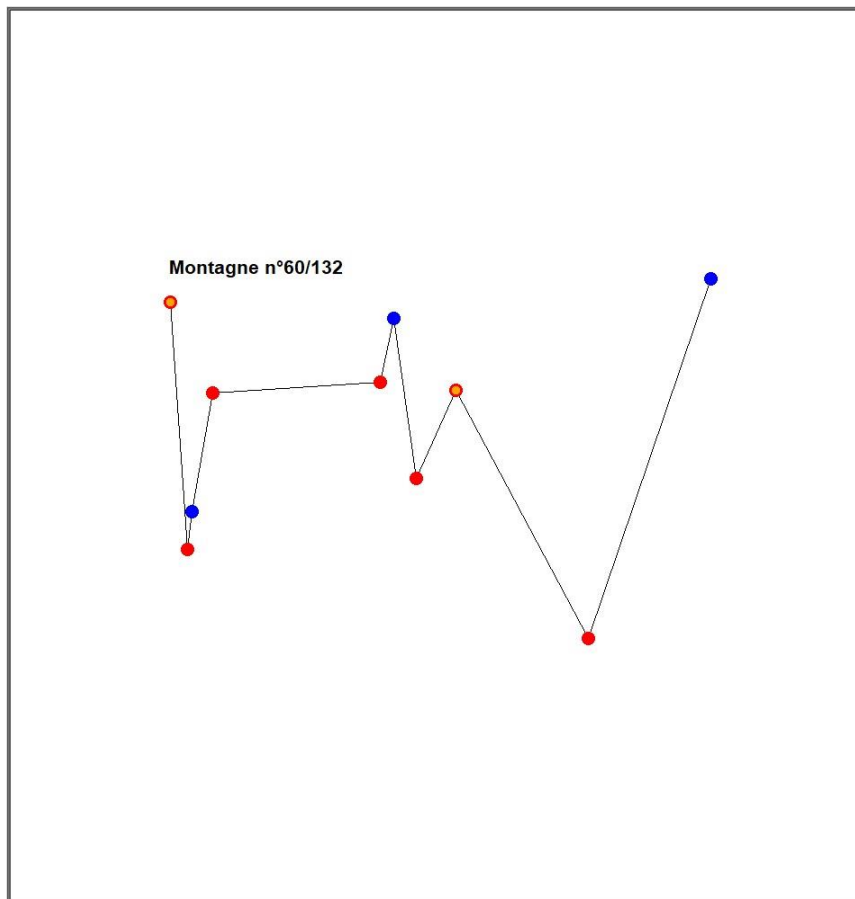
Le programme a donc choisi le point n°7 puisque c'est le dernier point dans l'ordre des abscisses à voir 7 points. Il va donc ensuite mettre le deuxième aigle sur le point n°4 puisqu'il voit 3 points parmi les restants puis doit placer un aigle sur le point 10.



Dans ce 2ème exemple, les points 4 et 6 voient le même nombre de nids(6). Il met d'abord un aigle au point 6 (dernier point dans l'ordre des abscisses), puis il met un aigle au point 4 et enfin au point 10. Il a donc besoin de 3 aigles. Alors que s'il avait mis au point 4 d'abord, il aurait ensuite mis au point 10 qui voient les 4 derniers nids. Deux aigles auraient suffi.

D'autres exemples:





On constate sur ceux-là que celui qui voit le plus n'est pas à prendre car après il reste deux sommets non vus qui nécessitent chacun un aigle (donc 3 aigles au lieu des 2 qui sont optimales). Dans la montagne n°32, on peut reconnaître le sous-sommet évoqué dans la 1ère partie de notre article. Il n'est pas bon de mettre un aigle à cet endroit et on comprend pourquoi il est préférable d'aller choisir le sous-sommet en face.

Conclusion: Ainsi, on constate que notre programme reste plutôt efficace et serait encore meilleur si on lui faisait en plus tester toutes les combinaisons lorsqu'il a des positions avec une visibilité identique en nombre de nids. Cela permettrait de garder la meilleure des solutions. Nous pourrions poursuivre ce travail par la suite et essayer de fusionner les deux stratégies évoquées dans notre article.

Notes :

- (1) On pourrait aussi placer les aigles sur le 1<sup>er</sup> creux et le 2<sup>e</sup> sommet.
- (2) Le procédé qui permet d'obtenir ces résultats est expliqué dans la partie suivante.
- (3) Attention au cas où, lorsqu'on insère un creux entre un creux et un sommet, le creux déjà existant devient un sommet. Dans l'exemple, si le 5<sup>e</sup> point était placé très bas, le 4<sup>e</sup> deviendrait un sommet et le 1<sup>er</sup> aigle ne pourrait plus le surveiller
- (4) Attention, dans le cas où les points 4 et 6 seraient placés plus haut, le point 5 ne serait plus visible pour les aigles. Ainsi, la phrase suivante ne s'applique pas dans tous les cas.
- (5) Propriété non démontrée mais triviale.
- (6) Il manque ici des informations sur le programme.