

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

## LES NOMBRES AVEC REPETITION

Article rédigé par Laura Zabrano, Marie Cerasi, Julie Freneix et Emma Locatelli, élèves de 1ère, année scolaire 2024-2025

Établissement : **Lycée Stendhal de Milan**, Italie

Enseignant : **Anne Cécile Airoidi**

Chercheur : **Jean-Paul Delahaye**, professeur émérite de l'Université de Lille1, Centre de recherche en informatique, signal et automatique – UMS CNRS

Une partie des résultats a été présentée au Congrès MATH.en.JEANS de Marseille 2025.

Présentation : Étude des nombres entiers avec répétition, c'est-à-dire de la forme AA ou AAA ou AAAA, etc.

Sujet :

### Question 1

On considère d'abord les nombres de la forme AA, c'est-à-dire dont l'écriture en base dix est obtenue en répétant deux fois la même suite de chiffres, comme par exemple : 2323, 625625, 97319731, etc. On les nomme les nombres "doublés".

Combien y a-t-il de nombres doublés à 2 chiffres ? Combien y a-t-il de nombres doublés à quatre chiffres (attention : 0404 par exemple ne compte pas car il commence par un zéro ce qui n'est pas accepté pour noter un nombre entier) ? Combien y a-t-il de nombres doublés à six chiffres ? Généralisez.

### Question 2

Se peut-il qu'un nombre doublé soit un nombre premier ?

Pourquoi les nombres doublés à 6 chiffres sont tous multiples de 11 ? Généralisez la remarque précédente.

### Question 3

On s'intéresse aux nombres triplés, c'est-à-dire de la forme AAA.

Combien y a-t-il de nombres triplés à 3 chiffres, à 6 chiffres, etc ? Pourquoi les nombres triplés sont-ils tous divisibles par 3 ?

### Question 4

Poursuivez l'étude en vous intéressant aux nombres quadruplés (AAAA) aux nombres quintuplés (AAAAA) etc. Recherchez en particulier ceux dont on peut être certain qu'ils sont divisibles par 3 ou par 11.

### Question 5

Étudiez les nombres doublés, triplés, etc. quand on calcule non plus en base 10, mais en base 2, 3, 4, etc.

## Introduction

Lorsque l'on prend les mots papa, doudou et chouchou, on remarque qu'ils sont tous constitués de ce qu'on pourrait définir un sous-mot qui est répété, donc mathématiquement translaté, un certain nombre de fois.

*Ex : dans le mot papa, « pa » est le sous mot qui est répété deux fois ; c'est un mot doublé à deux lettres.*

Définissons les termes du sujet :

- Un nombre répété est un nombre à effectifs fixe de chiffres qui subit une translation. C'est à dire qu'il sera composé du nombre initial répété de manière consécutive;
- Il ne peut pas commencer par 0 ;
- Ce nombre peut être doublé, triplé, quadruplé ou quintuplé.

Si on définit un nombre A composé de n chiffres le nombre s'écrira AAA...A un nombre x de fois qui correspond à la répétition.

### Application mathématique

Exemple :

513 513 est un nombre doublé à 3 chiffres ;

43 43 43 est un nombre triplé à 2 chiffres ;

9876 9876 9876 9876 est un nombre quadruplé à 4 chiffres;

3 3 3 est un nombre triplé à 1 chiffre.

### Question 1

On pose des variables:

N : le nombre de possibilités de nombres doublés (ce que l'on cherche) ;

A : le nombre avant qu'il soit doublé ;

n : le nombre de chiffres dans le nombre à doubler.

Combien de nombres doublés pouvons nous trouver ?

⇒ A **un** chiffre, donc *entre 10 et 99* : on double **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** et on obtient donc **11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99**. Il y a donc 9 nombres doublés à 1 chiffre.

⇒ A **deux** chiffres, donc *entre 1000 et 9999* : en suivant le même raisonnement, on prend tous les nombres que l'on peut doubler **entre 10 et 99 donc 99-10=90 nombres**. Il y a donc 90 nombres doublés à 2 chiffres.

ex: 1212

Pour trouver tout les nombres à deux chiffres que l'on va doubler suivant la question : combien peut on créer de nombre doublés à deux chiffres ? On a donc fait un tableau ci dessous.

n1 n2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

⇒ A **trois** chiffres, donc entre 10000 et 99999 : en suivant le même raisonnement, on prend tous les nombres que l'on peut doubler **entre 100 et 999 donc 999-100=900 nombres**. Il y a donc 900 nombres doublés 3 chiffres.

ex: 435 543

Il nous reste plus qu'à compter les nombres de cases vertes, qui correspondent à tous les nombres à deux chiffres que l'on peut doubler.

Ceci s'applique à tous les nombres doublés qu'ils soient à un, deux, trois ou à n chiffres. Ainsi, nous généralisons :

avec A le nombre avant qu'il soit doublé et N le nombre de possibilités de nombres doublés, donc ce que l'on cherche :

$$N = A_{\max} - A_{\min} + 1$$

Lorsqu'on change les critères et que l'on demande par exemple : combien de nombre doublé à trois chiffres , le critère du nombre de chiffres change le calcul et le résultat.

Fun fact : nous allons chercher à comprendre les critères de divisibilités qui s'appliquent aux nombres à répétition.

Le critère de divisibilité de 3 s'applique aux nombres triplés:

⇒ Lorsque on triple 1 nombre, il y a 3 fois chaque chiffre le composant

Rappel du critère divisibilité par 3 : additionner les chiffres composant le nombre, leur somme doit être un multiple de 3

Avec un nombre  $xy$  qu'on triple :

$xy\ xy\ xy$

On applique le critère de divisibilité :

$$x+y+x+y+x+y = 3x+3y$$

On factorise :

$$3(x+y)$$

La somme étant un multiple de 3, nous généralisons : tout nombre triplé est multiple de 3

Nous allons voir maintenant l'application du critère de divisibilité par 11 pour des nombres à 3 chiffres:

→ Pour un nombre doublé a trois chiffres que l'on écrit ABC ABC

chiffres	A	B	C	A	B	C
indice	1	2	3	4	5	6

Puisque  $(a+b+c) - (a+b+c) = 0$  alors le chiffre est divisible par 11.

exemple : 234 en format AA avec  $n=3$

234 234 →  $(2+4+3) - (3+2+4) = 0$  → 234 234 est divisible par 11.

Désormais nous allons chercher à comprendre quelles sont les conditions qui font qu'un nombre double est premier. Cependant, il semble que ce soit le seul car tous les nombres doublés à un chiffre sont divisibles par 11, ils ne sont donc pas premiers.

On remarque:

- divise A par A = 11                      exemple :  $88 \div 8 = 11$
- divise AA par A = 101                  exemple :  $9696 \div 96 = 101$       **note (1)**
- divise AAA par A = 1001                exemple :  $756756 \div 756 = 1001$

## Généralisation

Nous avons commencé à chercher une manière de généraliser pour savoir combien de nombres peut-on former quel que soit le nombre de répétitions (doublé ; triplé ; quadruplé, etc...) et quel que soit le nombre de chiffres qui composent le nombre à doubler (que ce soit un nombre à 1 chiffre, à 2 chiffres, à 3 chiffres, à 4 chiffres avant qu'il soit doublé).

Nous cherchons donc dans un premiers temps le nombre de possibilités pour des nombres qui possèdent le même nombre de chiffres avant d'être doublé et nous faisons varier uniquement le critère de la répétition (double, triple, quadruple, quintuple, etc...).

Dans les trois exemples suivants on traitera uniquement avec des nombres à trois chiffres compris donc entre 100 et 999 :

Exemple 1/ Nous essayons avec par exemple de chercher combien il y a de nombres doublés à **trois chiffres** compris donc entre 100 et 999.

En utilisant la formule précédente on trouve :  $999-100+1=900$  possibilités.

Exemple 2/ Maintenant nous allons chercher combien de nombres triplés à **trois chiffres** entre 100 et 999 :

$999-100+1=900$  possibilités

Exemple 3/ Combien de nombres quadruplés à **trois chiffres** entre 100 et 999 :

$999-100+1=900$  possibilités

Nous observons que le résultat ne varie pas. On peut en déduire que la répétition n'a aucun impact sur le nombre de possibilités car en effet on effectue une translation et on répète simplement le nombre.

Nous allons maintenant faire varier le critère du nombre composant le nombre avant qu'il effectue sa translation donc n.

exemple:

combien de nombres doublés à **2 chiffres** entre 10 et 99 :

$99-10+1 = 90$  possibilités

combien de nombres doublés à **3 chiffres** entre 100 et 999 :

$999-100+1 = 900$  possibilités

combien de nombres doublés à **4 chiffres** entre 1000 et 9999 :

$9999-1000+1 = 9000$  possibilités

⇒ **On en déduit donc que c'est le nombre de chiffres composant le nombre avant qu'il soit doublé (n) qui fait varier le nombre de possibilités (et donc pas sa répétition).**

---

Cette généralisation permet de bien avancer sur le sujet mais désormais nous voulons encore plus globaliser notre domaine d'étude et nous intéresser aux bases.

Petit rappel : Qu'est ce qu'une base ?

En base 2 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1

En base 3 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1 ; 2

En base 4 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

En base 5 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

En base 6 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

En base 7 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

En base 8 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

En base 9 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

En base 10 les chiffres que l'on utilise sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

Pour compter en base 2. On utilise uniquement les chiffres 0 et 1.

On se demandera combien de nombres doublés il y a en base 2 :

à 1 chiffre : **11** → donc **1** =  $2^0 \times 1$

à 2 chiffres : **1010 ; 1111** → donc **2** =  $2^1 \times 1$

à 3 chiffres : **100100 ; 101101 ; 111111 ; 110110** → donc **4** =  $2^2 \times 1$

à 4 chiffres : **10001000 ; 10011001 ; 11111111 ; 11001100 ; 11101110 ; 10101010 ; 10111011 ; 11011101** → donc **8** =  $2^3 \times 1$

Pour compter en base 3 on utilise uniquement les chiffres 0 et 1 et 2.

On se demandera combien de nombres doublés il y a en base 3 :

à 1 chiffre : **11 ; 22** → donc **2** =  $3^0 \times 2$

à 2 chiffres : **1010 ; 1111 ; 2020 ; 2121 ; 2222 ; 1212** → donc **6** =  $3^1 \times 2$

à 3 chiffres : **100100 ; 101101 ; 111111 ; 110110 ; 200200 ; 202202 ; 222222 ; 220220 ; 201201 ; 102102 ; 112112 ; 221221 ; 211211 ; 121121 ; 212212 ; 120120 ; 210210** → donc **18** =  $3^2 \times 2$

à 4 chiffres : **10001000 ; 11001100 ; 10101010 ; 10011001 ; 11101110 ; 11111111 ; 10111011 ; 20002000 ; 22002200 ; 20202020 ; 20022002 ; etc...** → donc **54** =  $3^3 \times 2$

Pour compter en base 4 on utilise uniquement les chiffres 0 et 1 et 2 et 3.

On se demandera combien de nombres doublés il y a en base 4 :

à 1 chiffre : **11 ; 22 ; 33** → donc **3** =  $4^0 \times 3$

à 2 chiffres : **1010 ; 1111 ; 2020 ; 2121 ; 2222 ; 1212 ; 3333 ; 3131 ; 3232 ; 3030 ; 1313 ; 2323** → donc **12** =  $4^1 \times 3$

à 3 chiffres : 100100 ; 110110 ; 101101 ; 111111 ; 200200 ; 220220 ; 202202 ; 222222 ; 300300 ; 330330 ; 303303 ; 333333 ; 122122 ; 112112 ; 121121 ; 211211 ; 221221 ; 212212 ; 322322 ; 332332 ; 323323 ; 232232 ; etc.. → donc  $48 = 4^2 \times 3$

Généralisation :

Avec:

- N : le nombre de possibilités de nombres doublés
- X : la base
- n: le nombre de chiffres à doubler

$$N = X^{n-1}(X-1) = X^n - X^{n-1}$$

On observe en reprenant ce que nous avons remarqué que cette formule fonctionne quelle que soit la base et quelque soit le nombre.

On se demande ensuite si il y existe des nombres doublés premiers et si oui lesquels ?

Nous savons qu'il y a par exemple le nombre 11, qui est doublé à un chiffre. Cependant, lorsqu'on liste nos nombres doublés à un chiffre, hormis 11, ils sont tous divisibles par 11. Il en est de même lorsqu'on liste les nombres doublés à deux chiffres, comme 2424, puisqu'ils sont tous divisibles par 101 et les nombres doublés à trois chiffres, comme 567567, puisqu'ils sont tous divisibles par 1001. Cela nous conduit à démontrer qu'aucun nombre doublé est premier, sauf 11 :

- avec p le nombre de répétition, sur un nombre doublé p=2
- avec A le nombre à doubler, en considérant qu'un nombre doublé s'écrit donc AA
- en reprenant la base X

Montrons que AA est divisible par A :

$$AA \text{ s'écrit : } AA = A \times X^{n+1} + A \times X^0$$

$$\text{donc : } AA = A \times (X^{n+1} + X^0)$$

AA est donc divisible par AA, 1, et A : il n'est donc pas premier

ex : prenons A=96 en base 10, p=2 ; on a **9696** :

$$\begin{aligned} 9696 &= 96 \times 100 + 96 \times 1 \\ &= 96 \times 10^2 + 96 \times 10^0 \\ &= \mathbf{96 \times (10^2 + 10^0)} \end{aligned}$$

Ensuite, montrons que quel que soit le nombre de répétitions p, donc un nombre de la forme AAA ...A, est également divisible par A :

AAA ...A s'écrit :  $AAA...A = A \times X^{(p-1)n} + A \times X^{(p-2)n} + A \times X^{(p-3)n} + \dots + A \times X^{(p-p)n}$   
donc :  $AAA...A = A \times (X^{(p-1)n} + X^{(p-2)n} + X^{(p-3)n} + \dots + X^{(p-p)n})$

AAA...A est donc divisible par AAA...A, 1 et A : il n'est donc pas premier.

*Nous remercions le chercheur qui nous a suivies, M. Delahaye, et nos professeurs Mme Airoidi, M. De Luca, M. Pousse et Mme Piras qui nous ont soutenues dans ce projet.*

### Note d'édition :

**note (1)** Il est dit : « *divise AA par A égal 101* », ceci n'est par exemple pas vrai quand A n'a qu'un chiffre. Ce qui est vrai est qu'un nombre composé d'une répétition de A est toujours divisible par A, donc une condition nécessaire pour qu'un tel nombre soit premier est que  $A=1$ , c'est à dire que le nombre n'est composé que de 1. Tous les nombres de cette forme ne sont pas premiers (par exemple 111 ou 1111 ne le sont pas), mais 11 n'est pas le seul (par exemple, 1 111 111 111 111 111 111 111 est premier).