La ruche

Jules G.
Baptiste M.

Sommaire

- Présentation du problème

- Définition d'un polygone régulier

- Différents pavages du plan
    - Pavages réguliers
    - Pavages irréguliers

Présentation du problème

- Une ruche d'abeille est un **pavage** du plan par des polygones, c'est à dire que l'on dispose des polygones **côte à côte** de sorte à remplir le plan. On considère que la ruche est construite à partir d'un polygone.
- Afin de consommer **le moins** de cire possible pour construire la ruche, les abeilles veulent maximiser le rapport :

$$R = \frac{aire}{périmètre}$$

Nous avons choisi de prendre comme unité, dans chaque cas, le côté du polygone (comme si les abeilles utilisaient pour construire la ruche des bâtons de cire préfabriqués tous identiques)

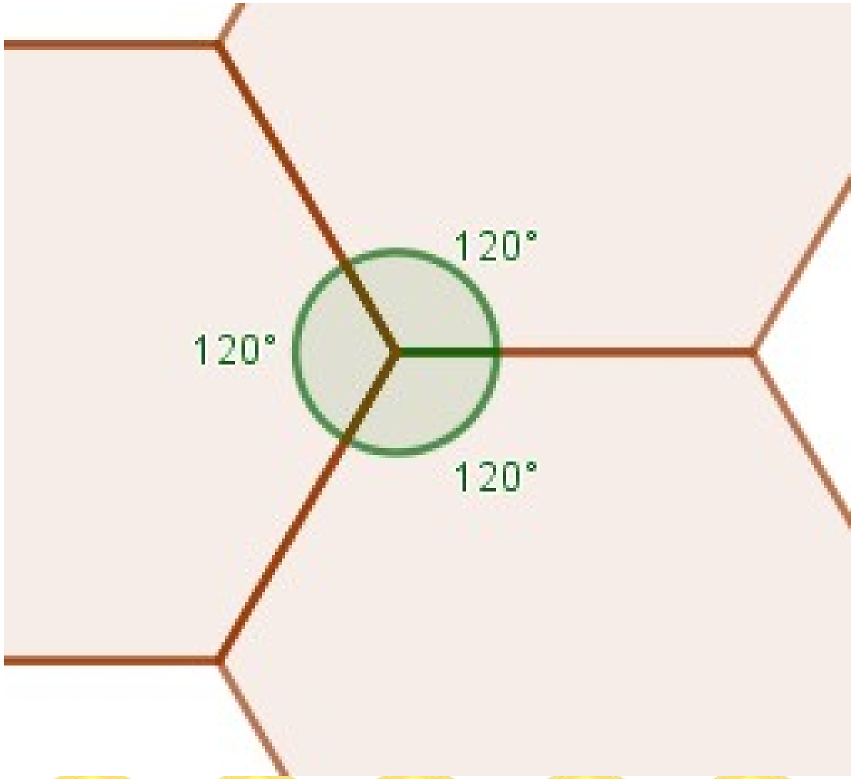
Quel est le meilleur pavage ?

Définition d'un polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone qui a :

- tous les côtés de même longueur
- tous les angles de même mesure

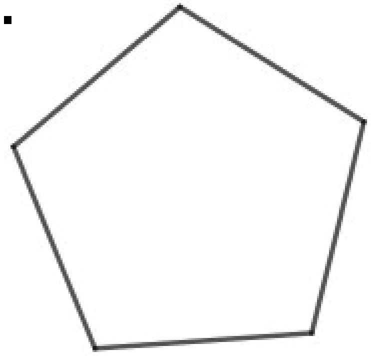
Pour trouver tous les polygones réguliers qui peuvent paver le plan, il faut trouver leur angle au sommet : cet angle doit être un diviseur de 360°.



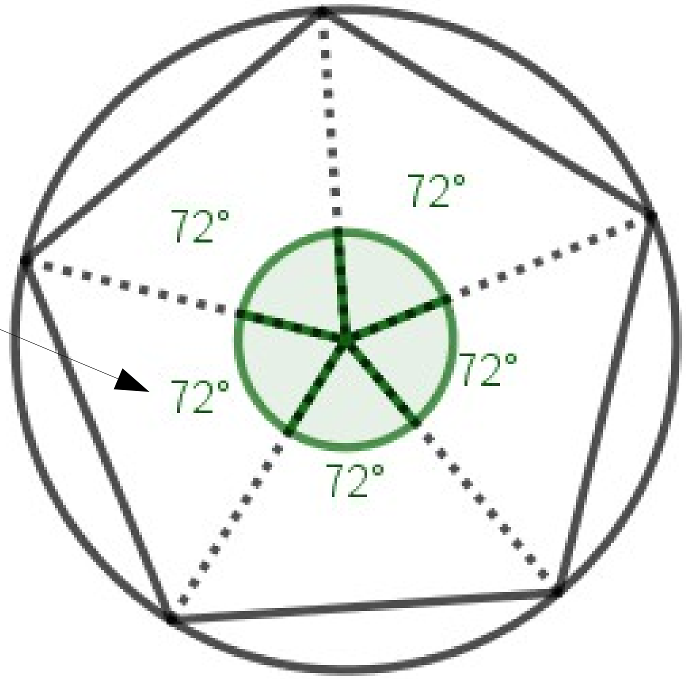
Comment calculer l'angle d'un polygone ?

- Un polygone régulier est inscrit dans un cercle.
- Pour calculer l’angle du polygone, il faut d’abord calculer son angle au centre a.
- Pour trouver cet angle on divise 360° par le nombre de côtés du polygone.

Prenons comme exemple le pentagone régulier.



Angle au centre :
a = 360°/5 = 72°.

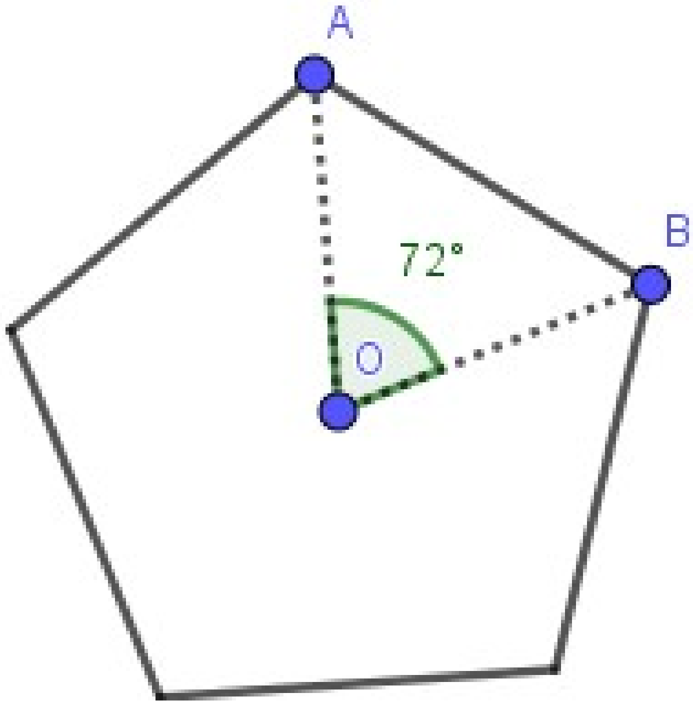


La somme des angles d’un triangle fait 180° ; de plus, OAB est isocèle donc ses angles de la base sont de même mesure donc :

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$$

L’angle du polygone vaut :

$$\frac{180° - 72°}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 180° - 72° = 108°$$



Généralisation pour un polygone à n côtés

Son angle au centre est : a = $\frac{360°}{n}$

L'angle du polygone est : $180° - \frac{360°}{n}$

Pour paver le plan il faut donc que cet angle soit un diviseur de 360°.

Voici les diviseurs de 360 :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 24 ; 30 ; 36 ; 40 ; 45 ; 60 ; 72 ; 90 ; 120 ; 180 ; 360.

Différents pavages possibles

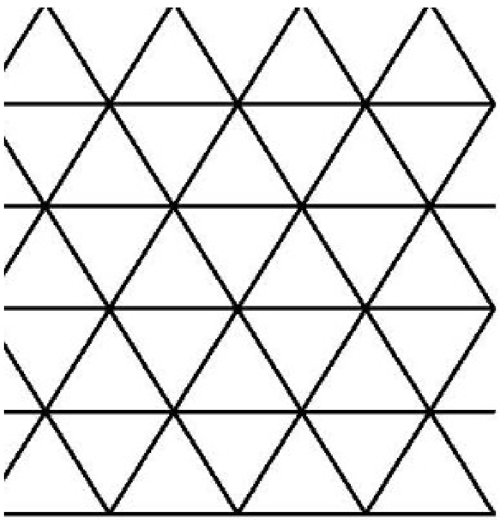
- 3 côtés,triangle équilatéral : a = $180° - \frac{360°}{3} = 60°$
- 4 côtés, carré : a = $180° - \frac{360°}{4} = 90°$
- 5 côtés, pentagone : a = $180° - \frac{360°}{5} = 108°$ NON !
- 6 côtés, hexagone : a = $180° - \frac{360°}{6} = 120°$

Les seuls pavages avec des polygones réguliers qui conviennent sont le triangle équilatéral, le carré et l’hexagone.

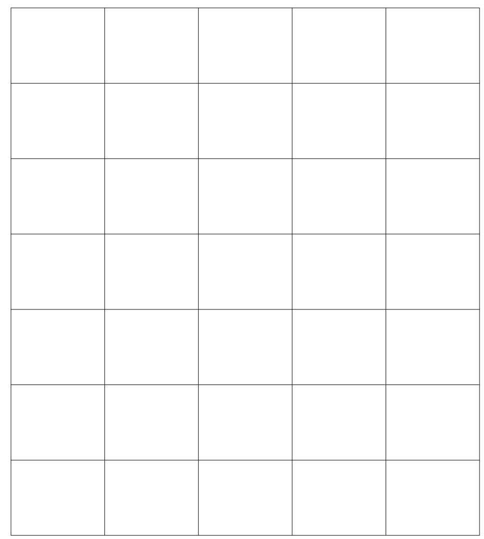
Au delà de 6 côtés, l’angle au sommet devient trop grand et nous ne pouvons plus avoir de diviseurs de 360°.

Nous allons donc étudier ces 3 pavages pour voir lequel maximise notre quotient.

Triangle équilatéral

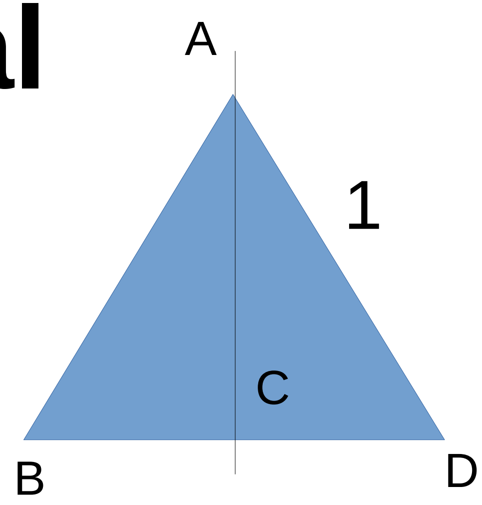


Carré



Hexagone régulier

Le triangle équilatéral



- Prenons la longueur du côté : 1 unité
- Périmètre : 1 + 1 + 1 = 3
- ABC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$1^2 = 0{,}5^2 + AC^2$$

$$AC^2 = 1 - 0{,}25 \qquad AC > 0$$

Donc : AC = $\sqrt{0{,}75}$

Donc l'aire de ABC : $\dfrac{\sqrt{0{,}75}}{2} \approx 0{,}433$

Triangle équilatéral

$$R = \frac{aire}{périmètre} = \frac{\sqrt{0,75} : 2}{3} \approx \mathbf{0,144}$$

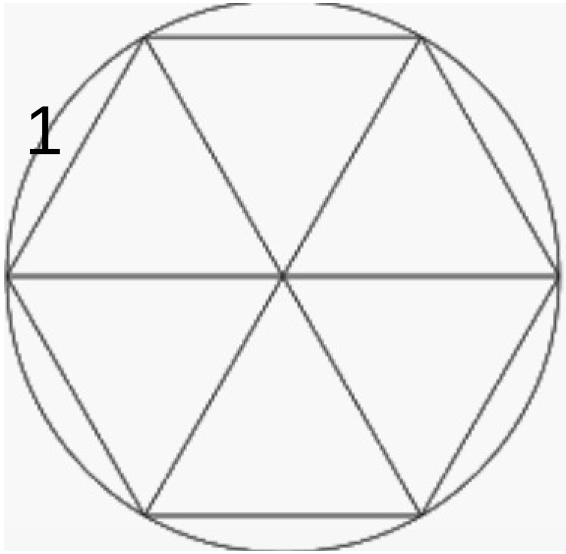
Le carré

1

- Périmètre : 4x1 = 4
- Aire : 1x1 = 1

$$R = \frac{aire}{périmètre} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Hexagone régulier



L'hexagone régulier est

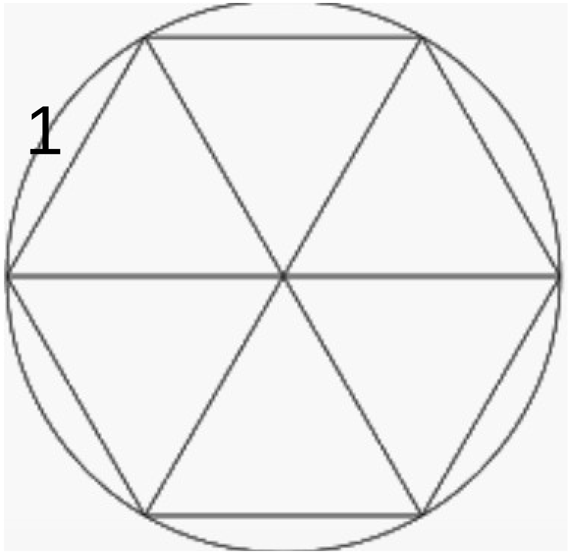
constitué de 6 triangles équilatéraux.

L’aire de ces triangles a été calculé avant :

$$\frac{\sqrt{0,75}}{2}$$

L’aire de l’hexagone est donc : $\frac{\sqrt{0,75}}{2}\times 6$

Hexagone régulier



- Périmètre : 6x1 = 6

- Aire : $\dfrac{\sqrt{0{,}75}}{2} \times 6 = 3 \times \sqrt{0{,}75}$

Donc : $R = \dfrac{aire}{périmètre} = \dfrac{3 \times \sqrt{0{,}75}}{6}$ ≈ 0,433

<u>Conclusion</u> :

L'hexagone régulier est le polygone régulier le plus avantageux des pavages réguliers.

Regardons maintenant quelques pavages avec des polygones irréguliers

Rectangle

- Périmètre : 2 + 2L
- Aire : $1 \times L = L$
- Donc : $R = \frac{L}{2+2L}$

On va regarder comment évolue le rapport R en fonction de L, la longueur du rectangle, qui est L fois plus grande que la largeur.

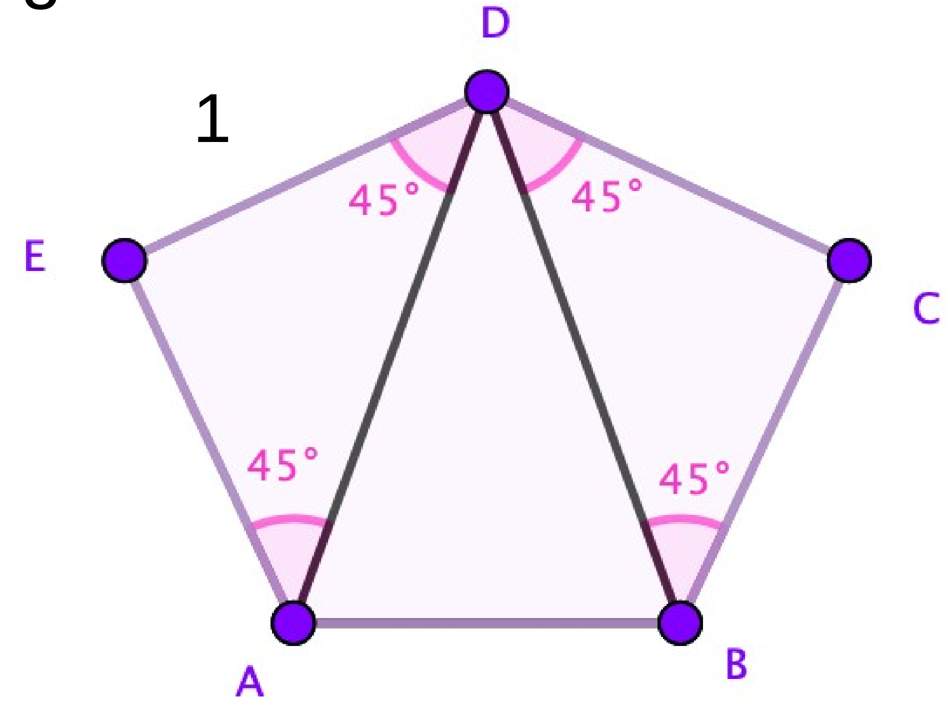
L	R
1,5	0,3
2	Environ 0,33
3	0,375
4	0,4
6	0,429
7	0,4375
30	0,48
100	0,495

Remarque

R augmente quand L augmente ; ce pavage devient plus intéressant que l’hexagone régulier lorsque L devient supérieur à 7.

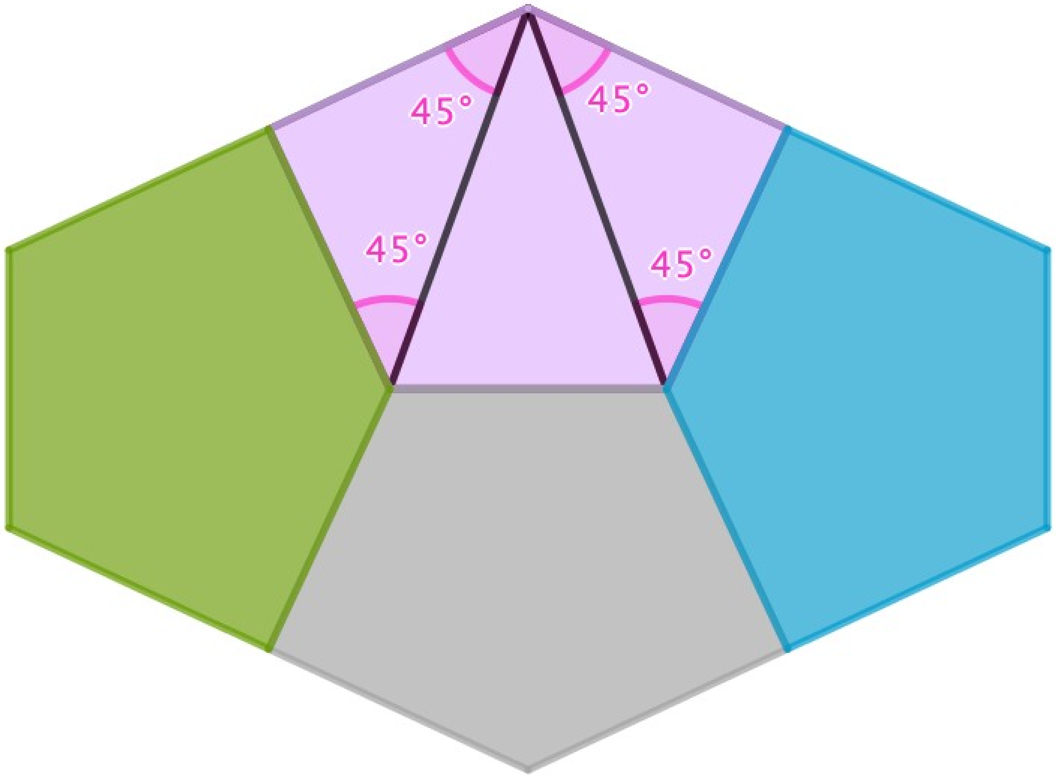
Les abeilles égyptiennes
Pavage du Caire

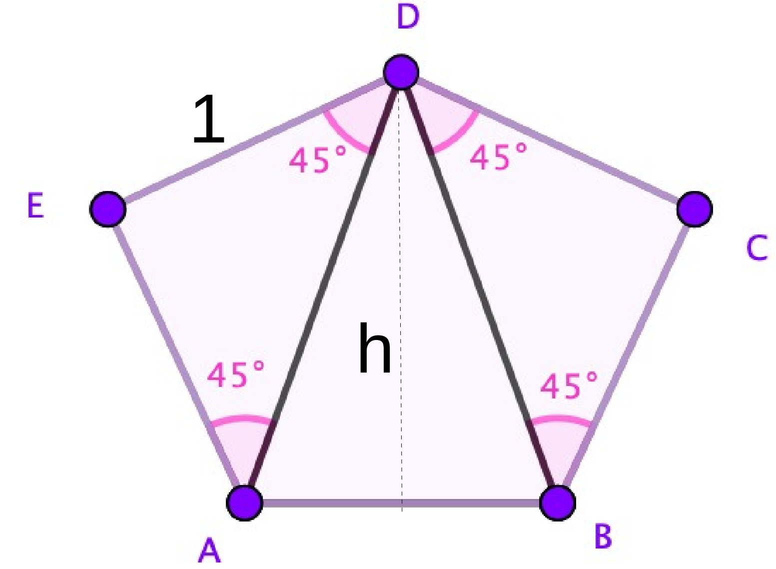
Tous les côtés égaux



Pavage du Caire

1





Périmètre : 1x5 = 5

Aire :

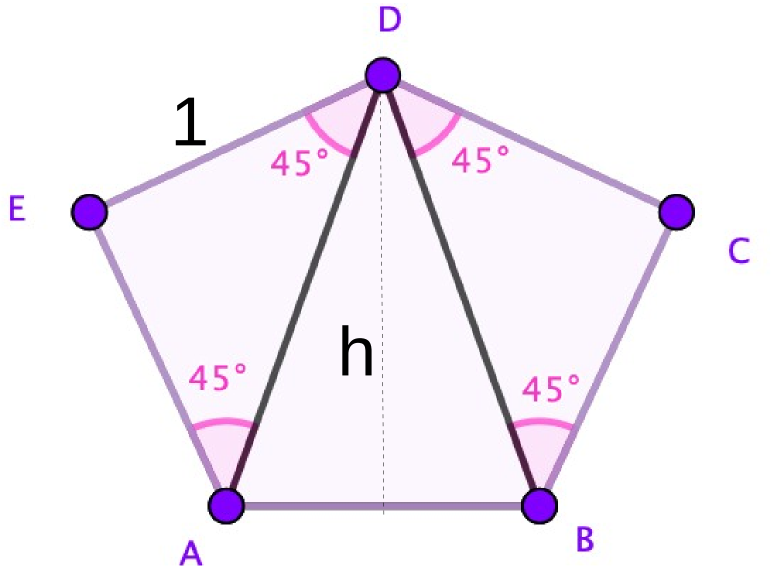
- Les 2 triangles rectangles :
(1x1/2) x 2 = 1
- Il reste à trouver l'aire du triangle isocèle ABD, pour cela on doit trouver sa hauteur h.

BDC est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$DB^2 = 1^2 + 1^2$ $\quad DB^2 = 2$ $\quad DB > 0$

Donc : $DB = \sqrt{2}$

Nous appliquons à nouveau le théorème de Pythagore :



$$\sqrt{2}^2 = 0{,}5^2 + h^2$$

$$h^2 = 2 - 0{,}25$$

$$h^2 = 1{,}75 \qquad h > 0$$

$$h = \sqrt{1{,}75}$$

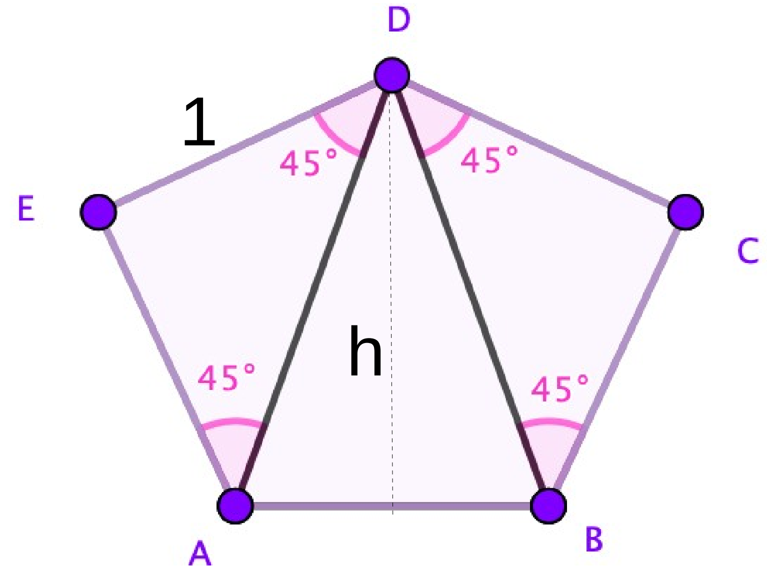
Donc l'aire de ABD : $\dfrac{1 \times \sqrt{1{,}75}}{2}$

Finalement :

Périmètre : 5

Aire : $\dfrac{\sqrt{1,75}}{2}+1$

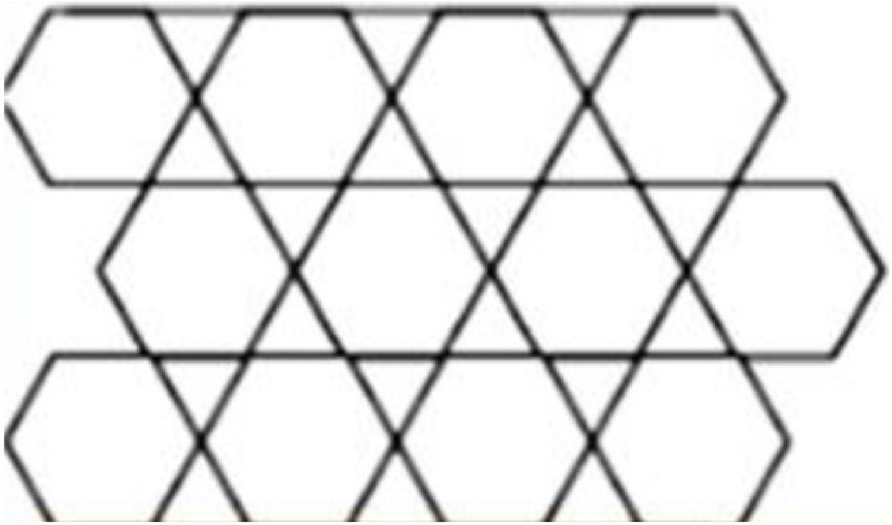
Donc : $R=\dfrac{\dfrac{\sqrt{1,75}}{2}+1}{5}$ ≈ 0,33



Ce pavage est donc moins bien que celui de l’hexagone régulier (0,433)

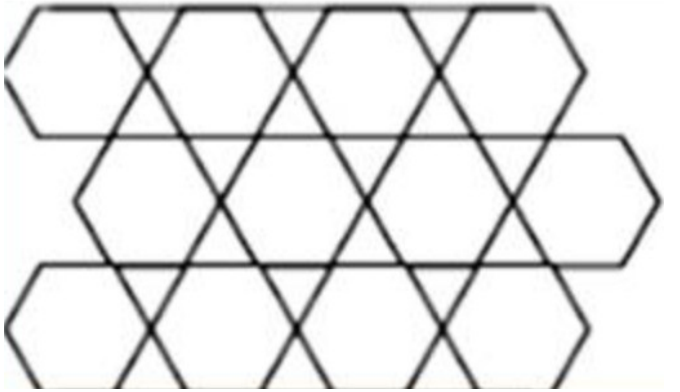
Les abeilles fantaisistes

De nombreux pavages existent comme ceux par exemple en combinant plusieurs polygones.



Nous avons déjà étudié les deux figures de base on peut reprendre nos résultats.
La figure de base ici est constituée d’un hexagone régulier et d’un triangle équilatéral.

On prend 1 comme longueur d'un des côtés.



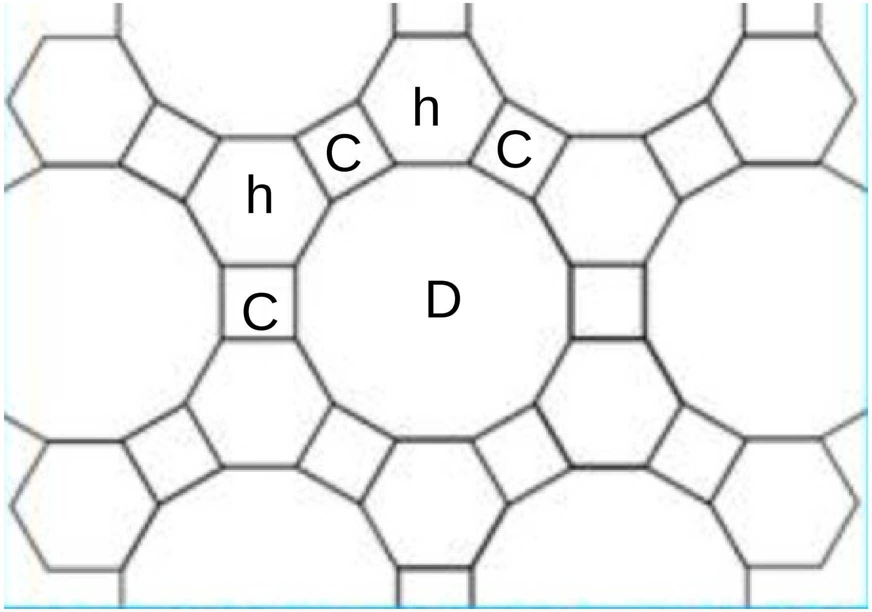
Somme des côtés : 8

Aire (triangle + hexagone) :

$$\frac{\sqrt{0,75}}{2}+3\times\sqrt{0,75}$$

Donc : $R=\dfrac{\dfrac{\sqrt{0,75}}{2}+3\times\sqrt{0,75}}{8}$ ≈ 0,38

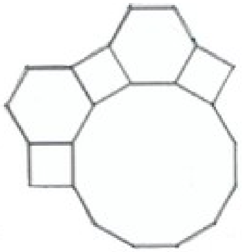
Ce pavage est donc moins bien que celui de l'hexagone régulier (0,433)

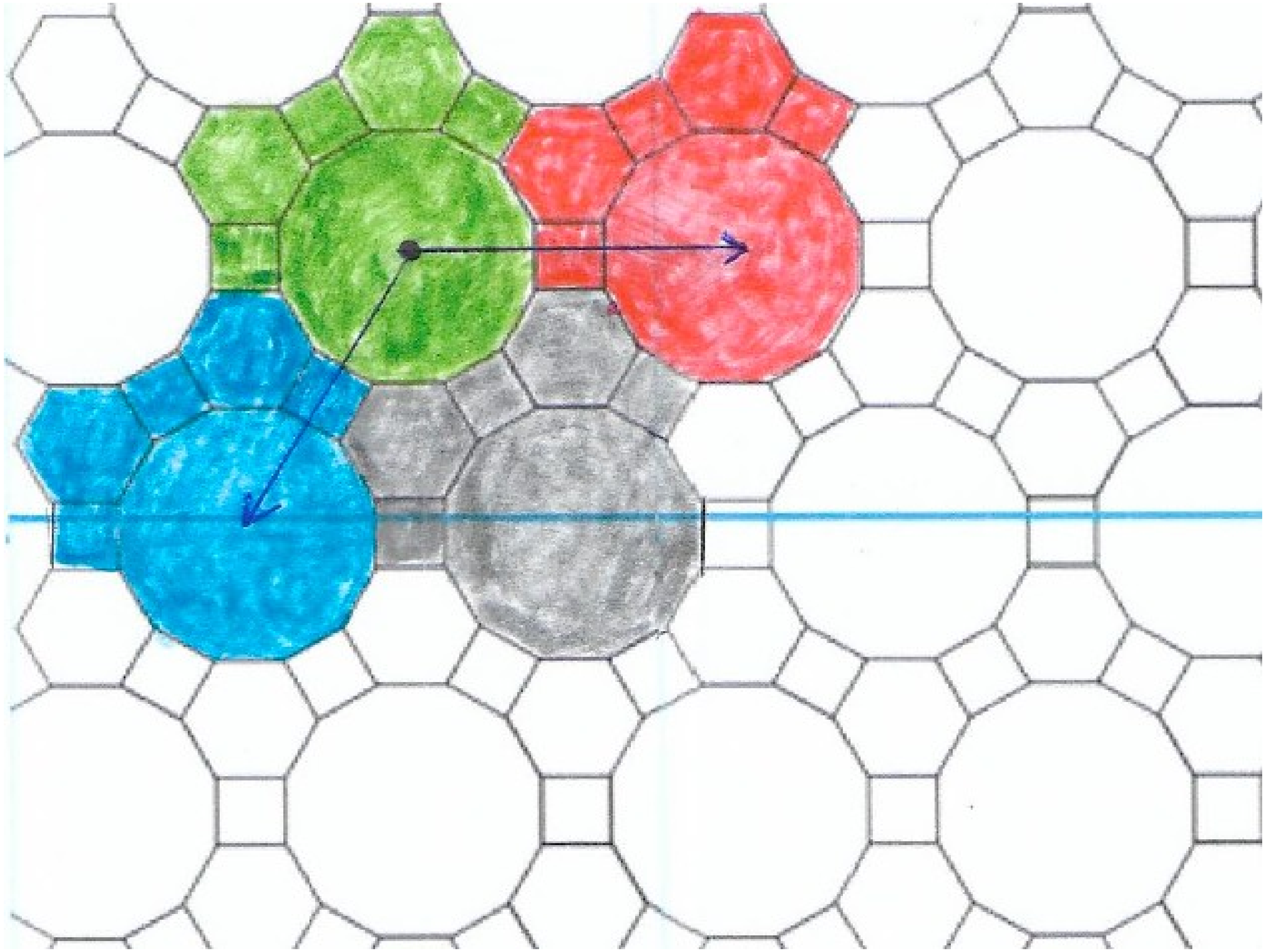


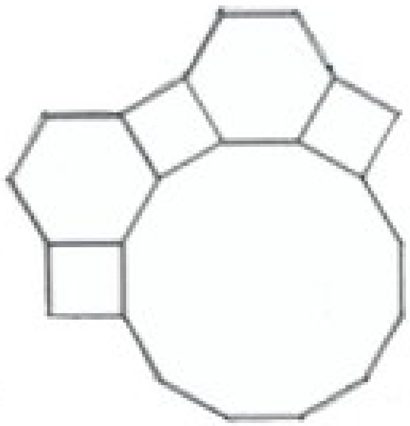
Côtés des polygones : 1

On regarde une partie du pavage constitué d’un polygone régulier à 12 côtés, de 3 carrés et de 2 hexagones réguliers.

Cette figure de base permet de reconstituer tout le pavage par translations :



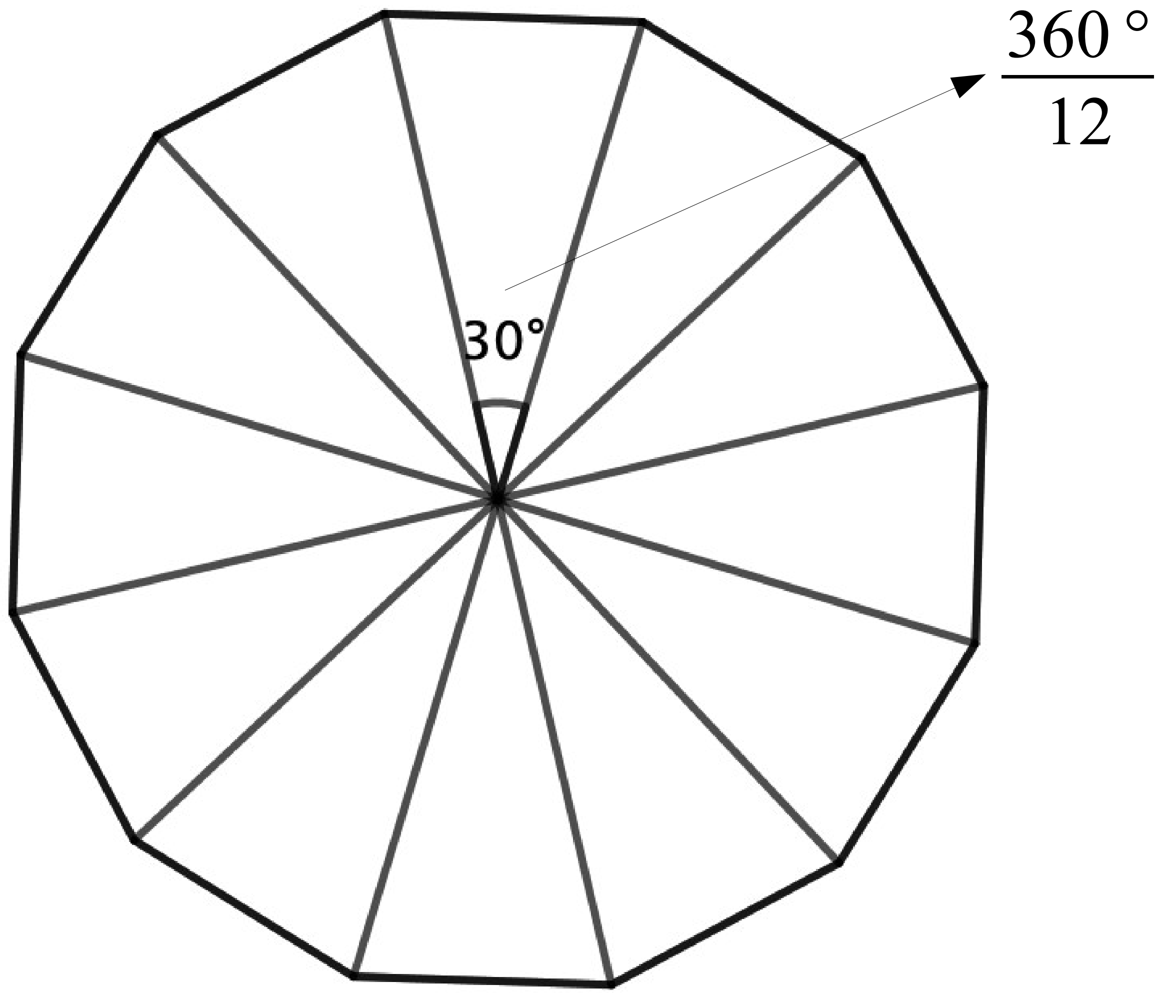




Côtés des polygones : 1

Somme des côtés : 27

Aire : 3 (carrés) + $2\times3\times\sqrt{0,75}$ (hex.) + A (dodécagone)



360 °
12
30°

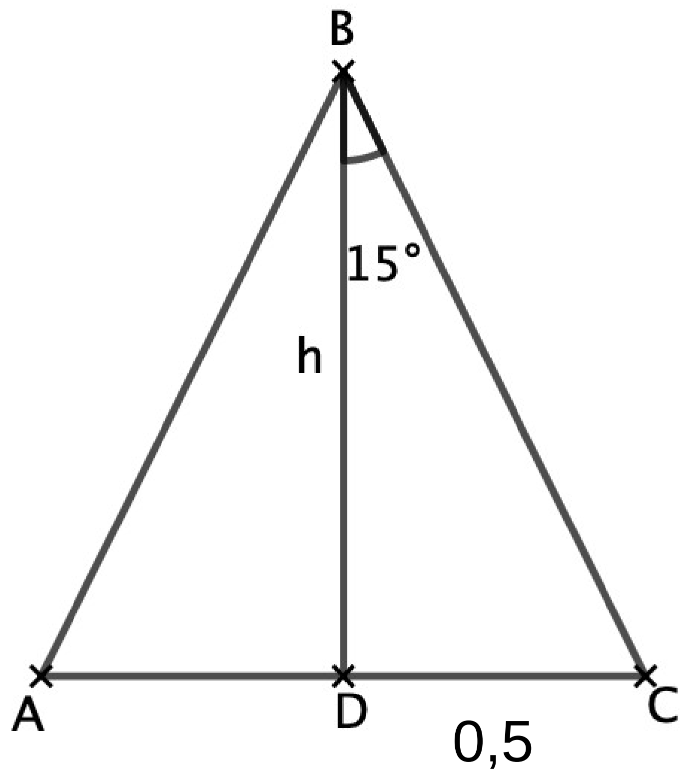
Il nous reste à calculer A.

Calcul de h : $\tan 15° = \frac{0,5}{h}$

Donc : $h = \frac{0,5}{\tan 15°}$

Donc l'aire du dodécagone :

$$\frac{\frac{0,5}{\tan 15°} \times 1}{2} \times 12 = \frac{3}{\tan 15°}$$



Finalement :

Somme des côtés : 27

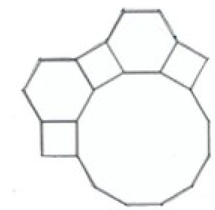
Aire : A = 3 + $6 \times \sqrt{0{,}75}$ + $\dfrac{3}{\tan 15^\circ}$ ≈ 19,39

Donc : $R \approx 0{,}72$

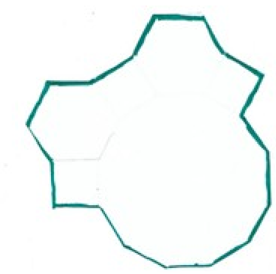
Ce pavage est donc interessant.

Et, si on a affaire à des abeilles vraiment fantaisistes…

qui seraient capables de fabriquer des rayons de cire ressemblant à ça :



ou plus exactement à ça :



Le nombre de côtés descendrait à 18.
On obtiendrait ainsi un rapport R inégalé :

$$R \approx 1{,}08 \text{ !!!!}$$

FIN

Merci de nous avoir écoutés