Survie de papillons...

Année scolaire 2018-2019

Sujet traité par :Axelle DUPARC, Kyllian DUPUY, Amélie JOUAN, Liesse JULIEN DE POMMEROL, élèves de 4e

Encadrés par : Pascale BEASSE et Béatrice BOILLOT
Etablissement : collège Stella Maris à Saint Quay Portrieux (22)

Chercheur : Victor KLEPTSYN (Université de Rennes 1, CNRS)

I- Présentation du sujet

On a un pays de forme rectangulaire, constitué uniquement de champs de même taille, eux-mêmes rectangulaires. Dans certains de ces champs, se trouvent des colonies de papillons. La position des papillons de ce pays évolue en fonction du temps, année après année, selon des règles bien précises.

Règle n°1: Si une année, une colonie de papillons est dans un champ, on considère qu'à la fin de l'année, elle aura mangé toute la nourriture du champ et elle sera donc obligée de migrer l'année suivante vers un champ adjacent, (champ ayant un côté en commun) le temps que la nourriture repousse.

Règle n°2: Si un champ est convoité par une seule colonie de papillons, l'année suivante, elle s'y installe.

Règle n°3: Si un champ est convoité par deux colonies de papillons, les deux colonies vont se battre pour l'occuper et les deux groupes de papillons vont alors mourir. Il n'y aura pas de papillon l'année suivante dans ce champ.

Règle n°4: Si un champ est convoité par trois colonies de papillons, deux d'entre elles vont se battre à mort pour l'occuper et la troisième colonie pourra s'installer dedans sans problème.

Règle n°5: Si un champ est convoité par quatre colonies de papillons, elles vont se combattre deux contre deux et aucune colonie ne colonisera le nouveau champ.

Règle n°6 : Les colonies de papillons s'installent toujours partout où elles le peuvent.

La question du chercheur :

Est-il possible de trouver une manière de positionner les papillons l'année zéro dans un pays de taille quelconque pour qu'ils survivent éternellement, c'est-à-dire pour qu'il y ait chaque année des papillons dans certains champs du pays.

II- Annonce des résultats trouvés

Nous avons réussi à partir des seuls pays de taille 2x1, 6x1, 7x1 et 3x3 à construire des pays de toutes les tailles, excepté 1x1 et 1x3, qui vivent éternellement.

III- article

1/ Explication du sujet

a/ Les règles exprimées de manière plus mathématique

Règle n°1 bis: Si une case est entourée d'un nombre pair de papillons il n'y aura pas de papillon l'année d'après dans cette case.

Règle n°2 bis: Si une case est entourée d'un nombre impair de papillons, les papillons s'installeront l'année d'après dans cette case.

b/ Deux exemples pour comprendre la question

Exemple 1 : sur un pays de taille 3x2 (3 colonnes, 2 lignes) voyons une position des papillons au départ dans laquelle en quelque années, il y a extinction des papillons

Année 0

P		
		P

Année 1

	P	P
P	P	

Année 2

Ce pays ne convient donc pas. Les papillons n'y survivent pas.

Exemple 2 : Sur un pays de même taille, voyons une position des papillons au départ qui survit éternellement.

Année 0

	P	

Année 1

P		P
	P	

Année 2

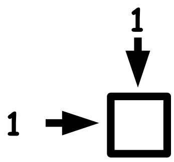
	P	

Cette fois-ci on remarque que la position des papillons revient à celle du départ, donc le pays survit éternellement.

2 – Recherche

Nous avons commencé avec des pays de petite taille que l'on a agrandi au fur et à mesure.
On a donc commencé par des pays d'une seule ligne.

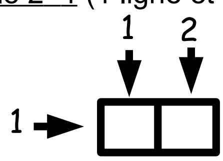
a/ Pays de taille 1×1 (1×1 signifie une seule colonne et une seule ligne.)



Pour un pays de taille 1×1 il y a deux cas possibles
- 1er cas : On n'a pas de papillon l'année 0 donc l'année suivante il n'y en aura pas.
- 2ème cas : On a un papillon. D'après la règle n°1, l'année suivante il n'y en aura plus.

On en déduit que quelle que soit la position des papillons dans un pays d'une seule cellule ils ne peuvent pas survivre éternellement.

b/ Pays de taille 2×1 (1 ligne et 2 colonnes.)



Pour un pays de taille 2×1 il y a 4 cas possibles :
- <u>1er cas :</u> On n'a pas de papillon alors l'année suivante il n'y en aura pas non plus.
- <u>2ème cas :</u> On a un seul papillon, situé dans la cellule de gauche. L'année 1, il ira à droite puis l'année 2 il reviendra à gauche et ainsi de suite.

p				p		p	

- <u>3ème cas :</u> On a un seul papillon dans la cellule de droite. L'année 1, il ira à gauche puis l'année 2 il reviendra à droite et ainsi de suite.

- <u>4ème cas :</u> on a un papillon dans chaque cellule et d'après la règle n°1 l'année suivante il n'y en aura plus : ils vont mourir car il n'y a plus de nourriture dans leur champ et pas de place pour migrer ailleurs.

Conclusion : pour un pays d'une ligne et deux colonnes, les papillons peuvent vivre éternellement si on les positionne comme dans les cas 2 et 3.

<u>c/ Pays de taille 3×1</u>

Il y a 8 cas possibles :

	Année 0			Année 1			
-<u>1er cas</u>							= MORT
-<u>2ème cas</u>	P				P		On est ramené au cas 3
-<u>3ème cas</u>		P		P		P	On est ramené au cas 6
-<u>4ème cas</u>			P		P		On est ramené au cas 3
-<u>5ème cas</u>	P	P				P	On est ramené au cas 4
-<u>6ème cas</u>	P		P				= MORT
-<u>7ème cas</u>		P	P	P			On est ramené au cas 2
-<u>8ème cas</u>	P	P	P				= MORT

On repère que, à part pour les cas 1 et 8 dans lesquels la mort est immédiate, dans tous les autres cas, on est ramené en quelques étapes au cas 6 qui lui-même occasionne la mort du pays.

Conclusion : quelle que soit la position des papillons dans un pays de taille 3×1 ils ne peuvent pas survivre éternellement.

Bilan : Nous avons ainsi trouvé un pays de taille 2x1 qui survit éternellement. Certes, nous pouvons continuer cette recherche pour chaque taille de pays mais cela risque d'être long. Nous nous sommes donc posés la question de savoir s'il est possible de trouver des pays de taille plus grande qui survivent éternellement, mais construits à partir de pays déjà créés. Par exemple, nous avons trouvé un pays de taille 2x1 qui fonctionne éternellement. A partir de ce pays, pouvons-nous créer un pays deux fois plus grand qui fonctionne lui-aussi éternellement ?

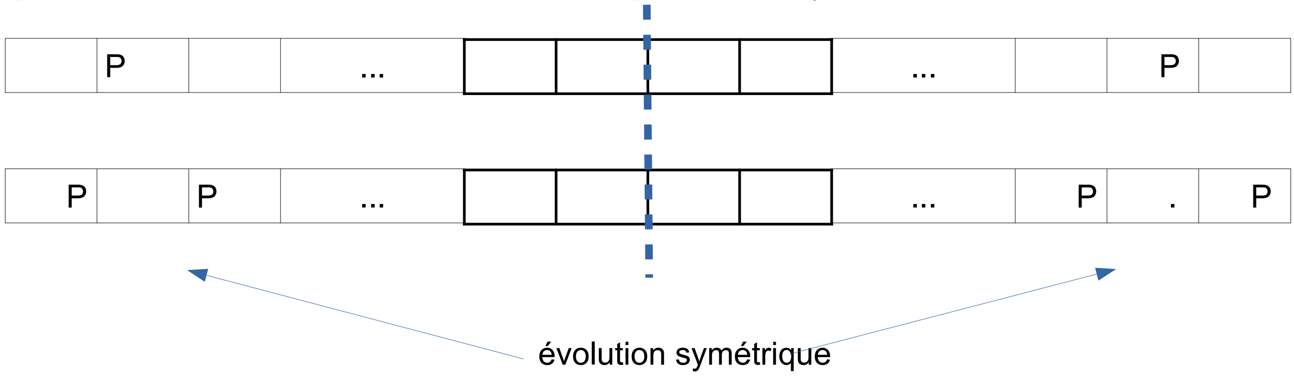
<u>d/ Construction d'un pays constitué d'un nombre pair de cellules</u> (et une seule ligne)

Plus généralement, comment passer d'un pays de taille nx1 qui vit éternellement à un pays de taille double (2nx1) qui, lui aussi, vit éternellement ?

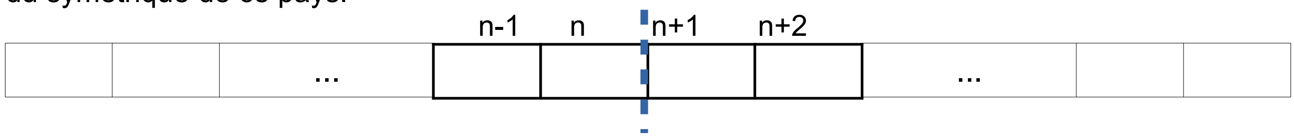
Voici ce que nous avons trouvé :
- On place le pays de taille nx1
- A la suite de celui-ci, on met le symétrique de ce pays.

On obtient ainsi un pays de taille 2nx1 ;

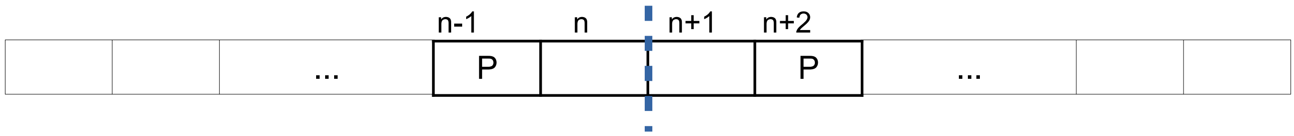
Ce pays aussi vit éternellement. En effet, l’évolution de chaque cellule ne dépend que de la cellule située directement à sa droite et à sa gauche. La symétrie de construction du pays implique alors que l’évolution des cellules situées loin de l’axe de symétrie reste identiquement symétrique (les cellules les plus à gauche et celles les plus à droite sont tellement éloignées les unes des autres, qu'elles évoluent sans être influencées les unes par les autres).



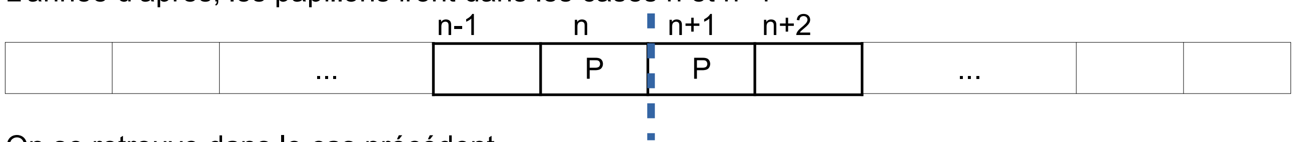
Par contre, au niveau de l’axe de symétrie, il peut y avoir problème. La n-ième cellule, contre l’axe de symétrie a en effet deux cellules adjacentes, l’une fait partie du pays nx1 mais l’autre fait partie du symétrique de ce pays.



Cas 1 : Par raison de symétrie, si dans la cellule n il y a un papillon, dans la cellule n+1, il y en aura un aussi.
L’année suivante, ces deux cellules seront donc vide.
Cas 2 : si dans la cellule n, il n’y a pas de papillon, dans la cellule n+1, il n’y en aura pas non plus.
Admettons qu’il y ait par contre un papillon dans la case n-1, il y en aura aussi dans la case n+2



L’année d’après, les papillons iront dans les cases n et n+1



On se retrouve dans le cas précédent.
L’année d’après ils repartiront dans les cases n-1 et n+1 (tout au moins si les cellules plus éloignées de l'axe le permettent) et ainsi de suite. Les papillons ne franchiront jamais l'axe de symétrie.
Si donc on a choisi un pays de taille nx1 qui vit éternellement, le pays ainsi créé de taille 2n x 1 vivra lui aussi éternellement.

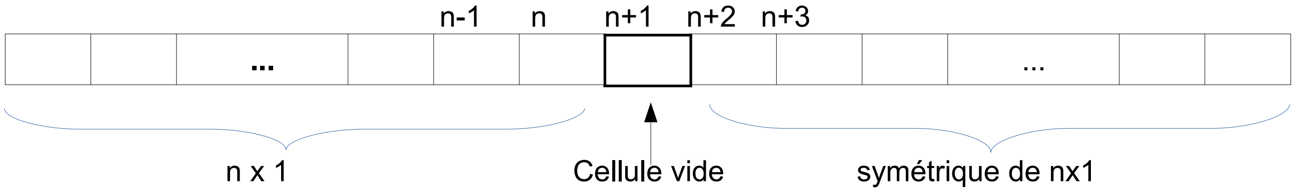
A partir de notre pays 2x1 qui vit éternellement, nous pouvons ainsi créer un pays de taille 4x1, puis à partir de celui-ci, un pays de taille 8x1 et ainsi de suite.

Le souci est que nous obtenons ainsi uniquement des pays dont le nombre de cellules est pair.
Nous avons donc cherché à construire, à partir du pays à 2 cellules, un pays constitué de cinq cellules (le double augmenté de 1).

e/ Construction d'un pays de taille impair

Plus généralement, à partir d’un pays de taille nx1 qui vit éternellement, on a construit un pays de taille (2n+1)x1 qui, lui aussi, vit éternellement.

Nous avons pour cela gardé le même principe de symétrie mais nous avons inséré une cellule vide entre le pays de taille nx1 et son symétrique.



Montrons qu’un tel pays peut, lui aussi, vivre éternellement.

Si on a un papillon dans la cellule n, symétriquement il y en aura un dans la cellule n+2. L’année suivante, il n’y aura plus de papillons dans ces deux cases. Il n'y en aura pas non plus dans la cellule centrale (n+1) car elle est entourée d'un nombre pair de papillons.
Les papillons ne peuvent alors aller que dans les cases n-1 et n+3. L'évolution reste donc symétrique : c'est comme si le pays nx1 et son symétrique évoluaient séparément sans s'influencer l'un l'autre. En partant d'un pays nx1 qui vit éternellement, on crée ainsi un pays de taille (2n+1)x1 qui, lui aussi, vit éternellement.
Par exemple, à partir du pays de 2 cellules, on crée un pays de 5 cellules. A partir de ce nouveau pays, on peut en créer un de 11 cellules et ainsi de suite.

P	

donne

P				P

qui donne

P				P		P				P

f/ Cas des pays de taille 6 et 7

Notre méthode ne fonctionne pas pour trouver des pays de taille 6 et 7 : il faudrait les construire à partir d'un pays de taille 3x1, mais nous avons prouvé qu'un tel pays ne fonctionne jamais.
Nous avons donc cherché « au hasard » si un pays de taille 6 et de taille 7 pouvait fonctionner. Nous en avons trouvé.

Par exemple : pour un pays de taille 6x1

Année 0

P					

Année 1

	P				

Année 2

P		P			

Année 3

			P		

Année 4

		P		P	

Année 5

	P				P

Année 6

P		P		P	

Année 7

					P

Ce dernier pays est le symétrique du premier. En doublant le nombre d'étapes, on retombera sur le pays de départ.

Et pour le pays de taille 7x1 :

Année 0

	P	P				P

Année 1

P			P		P	

Année 2

	P	P				P

Bilan : Voici un tableau qui présente un bilan de cette première partie.

Le pays de taille 2×1 donne 4×1 et 5×1 avec et sans cellule vide

Pour 6 et 7 cette technique ne fonctionne pas car 3 ne fonctionne pas on a donc fait autrement

Le pays de taille 4×1 donne 8×1 et 9×1 avec et sans cellule vide

Le pays de taille 5x1 donne 10x1 et 11x1 avec et sans cellule vide.

Taille de pays	Fonctionne ou pas	Pourquoi
1×1	non	Démontré
2×1	oui	Démontré P _
3×1	non	Démontré
4×1	oui	(2x2)x1 P _ _ P
5×1	oui	(2x2+1)x1 P _ _ _P
6×1	oui	Solution trouvée : P_ _ _ _ _
7×1	oui	Solution trouvée : _PP _ _ _ P
8×1	oui	Double de 4x1
9×1	oui	Double + 1 de 4x1
10×1	oui	Double de 5x1
11×1	oui	Double + 1 de 5x1
12×1	oui	Double de 6x1
13×1	oui	Double + 1 de 6x1
14×1	oui	Double de 7x1
15×1	oui	Double + 1 de 7x1
16×1	oui	Double de 8x1

⋮ ⋮ ⋮

On repère ainsi que l'on peut construire n'importe quel pays d'une ligne qui survit éternellement, sauf si celui-ci ne contient qu'une cellule ou trois cellules. En effet, avec 2 cellules, on a construit 4 et 5 cellules ; on a trouvé un pays de 6 cellules et un de 7 cellules qui survivent éternellement. A partir des pays de taille 4, 5, 6 et 7, on construit les pays de taille 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 15. A partir de ces nouveaux pays, on peut construire des pays de taille 16 jusque 31 ; le pays de taille 16 donne ensuite un pays de taille 32 et ainsi de suite. Il n'y a donc pas de « trous ».

A partir du pays de taille 2 et des pays de taille 6 et 7, on peut construire des pays d'une ligne de taille quelconque qui survivent éternellement.

g/ cas général nxm

Pour le cas nxm on peut superposer m lignes identiques.
Ainsi les papillons sont positionnés les uns au dessus des autres.

P			P
P			P
P			P
P			P
P			P
P			P

Exemple de construction d'un pays 4x6 à partir d'un pays de taille 4x1 : on a superposé 6 fois un pays 4x1 qui vit éternellement.

Observons une case l'année 0 : qu'elle soit vide ou qu'elle contienne des papillons, la case du dessus et du dessous sont semblables puisque toutes les lignes superposées sont identiques. Si on a une case vide alors les cases du dessus et du dessous seront vides.

Si on a une case avec un papillon celle du dessus et celle du dessous seront remplies de papillons.
Si elle contient un papillon, l'année d'après elle n'aura plus de papillons
Si elle ne contient pas de papillon, les cases du dessus et du dessous seront vides aussi puisque toutes les lignes superposées sont identiques.
Les seules cases susceptibles de contenir un papillon sont donc les cases de gauche et de droite: ce seront les seules cases qui auront un impact l'année suivante.
On en déduit que chaque ligne évolue indépendamment de la ligne du dessus et de la ligne du dessous.
Donc si on superpose m lignes nx1 qui sont telles que les papillons survivent éternellement, on aura ainsi construit un pays de taille nxm qui lui aussi peut survivre éternellement.
Finalement: puisque 2x1 fonctionne ,on peut construire n'importe quel pays de taille 2xm qui fonctionne aussi en superposant m fois notre pays 2x1 qui fonctionne.
De même 4x1, 5x1…nx1 pour n≥2 , nous permettent de construire des pays 4xm, 5xm,...,nxm qui fonctionnent aussi.
1x1 ne fonctionne pas donc on ne peut pas s'en servir pour créer des pays 1xm mais ce n'est pas grave car un pays de 1 ligne et m colonnes et un pays de m lignes et 1 colonne, c'est pareil (il suffit de lui faire faire un quart de tour) et on a vu que nx1 …fonctionne sauf pour 3x1.

3x1 ne fonctionne pas. Donc on ne peut pas construire un pays de plusieurs lignes avec 3x1.
Ce n'est pas grave pour le 3x2, le 3x4 et tous les suivants : on peut les construire comme des 2x3, des 4x3 et en général des nx3, mais ça pose problème pour le 3x3.

h/ Cas particulier du pays 3x3

Nous avonc cherché à construire un pays de taille 3x3 qui vive éternellement indépendamment de la méthode précédente.

En voici un qui convient :

Année 0

		p
p		p
p		

Année 1

p	p	
	p	p

Année 2

		p
p		p
p		

En deux étapes les papillons reviennent à leur place initiale donc ils survivent éternellement.
Ce n'est pas la seule configuration possible. En voici une autre que nous vous laissons le soin de tester :

Année 0

	p	p
p		

IV- Conclusion

On peut trouver au moins une position initiale des papillons qui permette au pays de survivre éternellement, sauf dans le cas 1x1 et 3x1 (ou 1x3).

Nous avons vu qu'il y avait certainement d'autres manières de positionner les papillons qui pouvaient fonctionner aussi mais l'avantage de notre méthode, c'est qu'à partir des pays de taille 2x1, 6x1, 7x1 et 3x3, on a pu construire tous les autres pays.

NOTES

Aucune note d'édition