Maths en Jeans 2020

Lycée International Alexandre Dumas

Lycée international A.Dumas - Alger

UN EMPORTE-PIÈCE CARRÉ

BEDJAOUI Manel

BENAMARA Hichem

BENAMARA Zakari

BENSIRADJ Lyna

KAOUADJI Nour El Houda

MOUSSA Tanina

TIMSILINE Lara Ines

SUJET :

La maman de Chloé vient d'acheter un lot d'emporte-pièces et lui demande si elle veut bien l'aider pour faire des sablés. Elle prépare donc deux boules de pâte. Elle en prend une, l'étale sur le plan de travail et commence par découper des formes avec les emporte-pièces.

Chloé, comme sa maman, étale la seconde boule. En regardant sa pâte étalée, elle demande à sa mère :

«Peut-on trouver un emporte-pièce en forme de carré tel que chaque coin soit sur le bord de la pâte?»


PowerDirector

PROBLÉMATIQUE :

En d’autres termes…

« Existe-t-il une relation permettant de calculer le côté d’un carré inscrit dans une forme définie ? »

Nous étudierons les cas du cercle et du triangle.

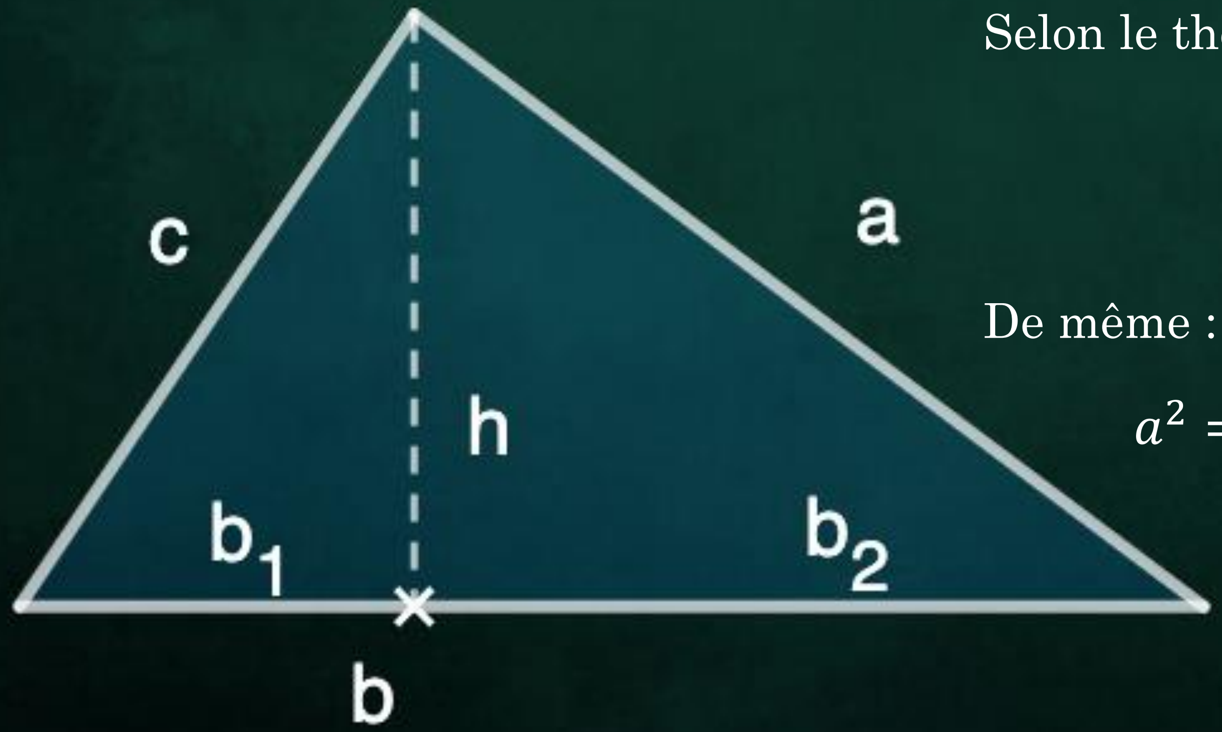
ÉTAPES D’INVESTIGATION :

Première piste

Utilisation d'une hauteur

Dans le cas d'une pâte triangulaire, nous avons en premier lieu supposé que trouver la mesure d'une hauteur en fonction des côtés pourrait nous aider à déduire les dimensions du carré inscrit.

Nous avons donc procédé au calcul de la longueur h :



Selon le théorème de Pythagore :

$$h^2 = c^2 - b_1^2$$
$$b_1 = \sqrt{c^2 - h^2}$$

De même :

$$a^2 = h^2 + b_2^2 = h^2 + (b - \mathbf{b_1})^2 = h^2 + \left(b - \sqrt{\mathbf{c^2} - \mathbf{h^2}}\right)^2$$
$$a^2 = b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} + c^2$$

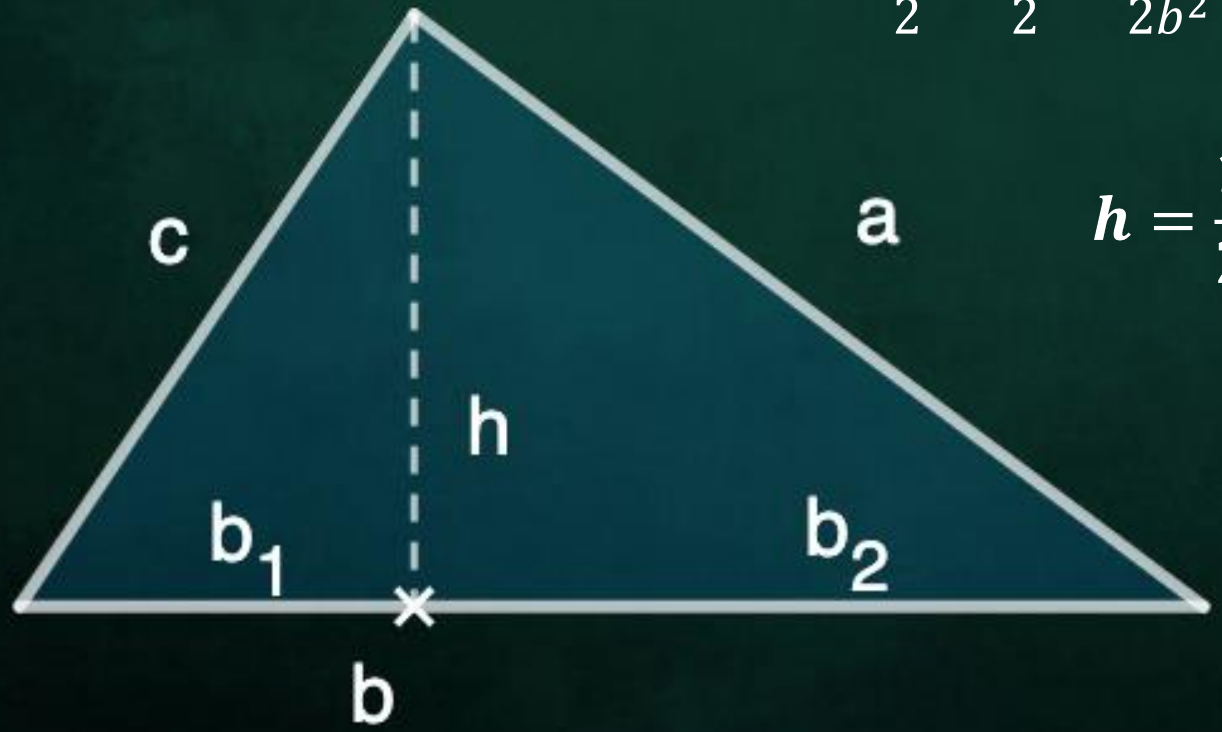
$$2b\sqrt{c^2 - h^2} = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\sqrt{c^2 - h^2} = \frac{1}{2b} * (b^2 + c^2 - a^2)$$

$$c^2 - h^2 = \frac{1}{4b^2} * (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$h^2 = \frac{1}{4b^2} * (2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) + c^2$$

$$h^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a^2c^2}{2b^2} - \frac{b^4}{4} - \frac{a^4 + c^4}{4b^2}$$



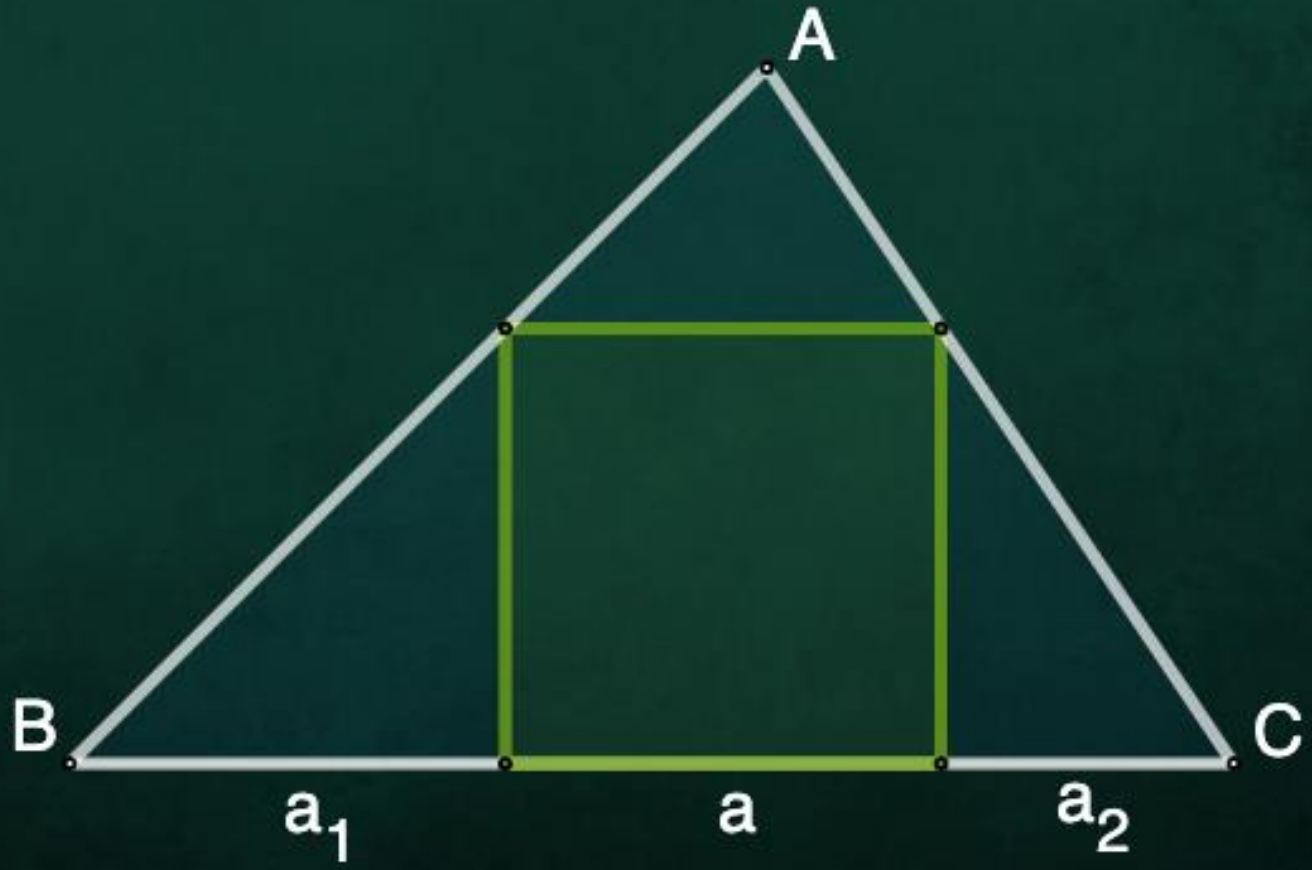
$$\boldsymbol{h = \frac{1}{2} * \sqrt{2a^2 + 2c^2 + \frac{2a^2c^2}{b^2} - b^2 - \frac{a^4 + c^2}{b^2}}}$$

Cette piste n'ayant finalement pas abouti, nous l'avons abandonnée au profit de l'essai suivant.

Seconde piste

Utilisation des angles

Modélisons la situation par la figure ci-dessous :

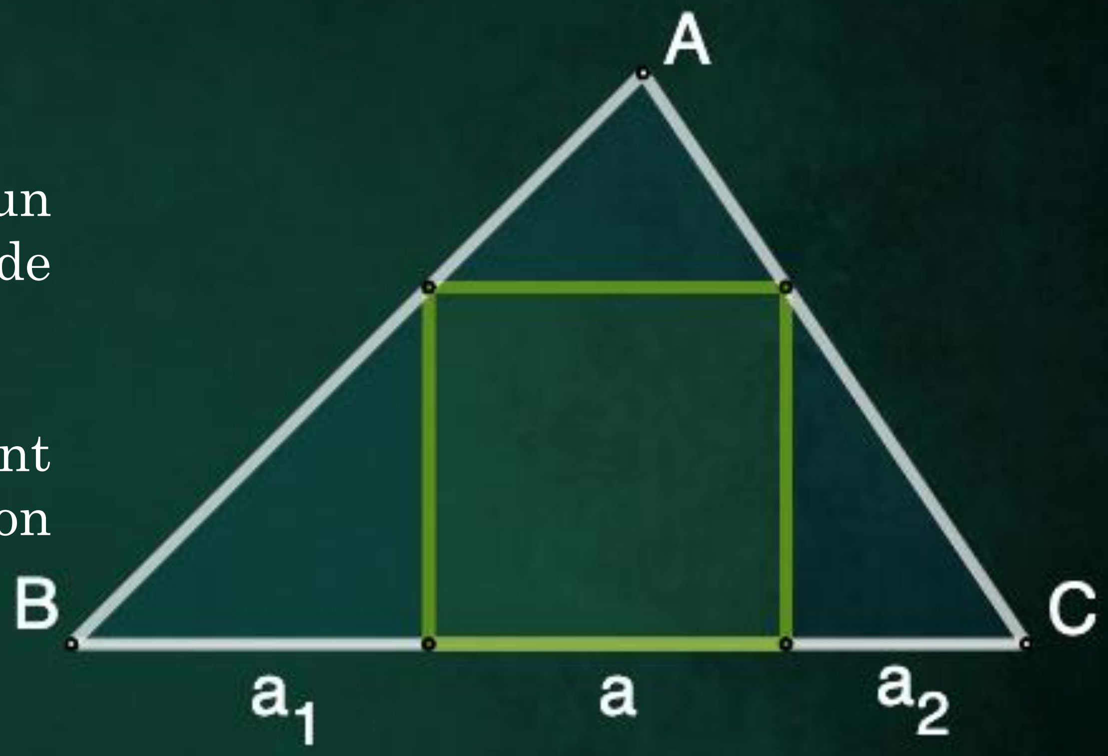


Il est ici question de trouver les dimensions d'un hypothétique emporte-pièce inscrit dans une pâte de forme triangulaire.

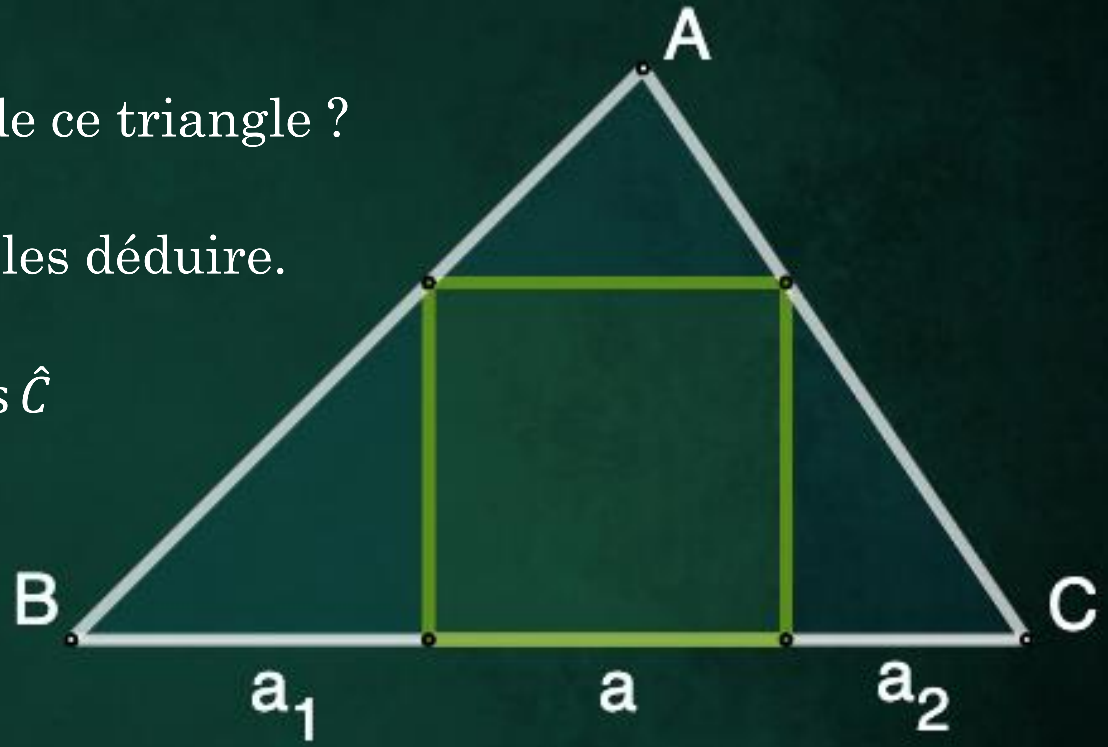
Afin que le résultat s'applique quelles que soient les mesures du triangle, il doit s'exprimer en fonction de celles-ci.

Cette fois encore, la pâte ayant une forme initialement donnée, ses dimensions sont forcément connues.

Le résultat devra donc s'exprimer en fonction des longueurs AB, BC et CA



Est-il possible de connaître les mesure des angles de ce triangle ?



En effet. La relation d'Al-Kashi nous permet de les déduire.

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 * BC * CA * \cos \hat{C}$$
$$\cos \hat{C} = \frac{-AB^2 + BC^2 + CA^2}{2 * BC * CA}$$
$$\hat{C} = \cos^{-1}(\frac{-AB^2 + BC^2 + CA^2}{2 * BC * CA})$$

Suivant la même méthode :

$$\hat{B} = \cos^{-1}(\frac{-CA^2 + AB^2 + BC^2}{2 * BC * CA})$$

$$\hat{A} = \cos^{-1}(\frac{-CB^2 + AC^2 + BA^2}{2 * BA * CA})$$

Les mesures des angles A, B et C s'ajoutent donc aux données.

Chacun des 2 triangles rectangles adjacents au carré permet d'établir les relations suivantes :

$$\tan B = \frac{a}{a_1} \ \& \ \tan C = \frac{a}{a_2}$$

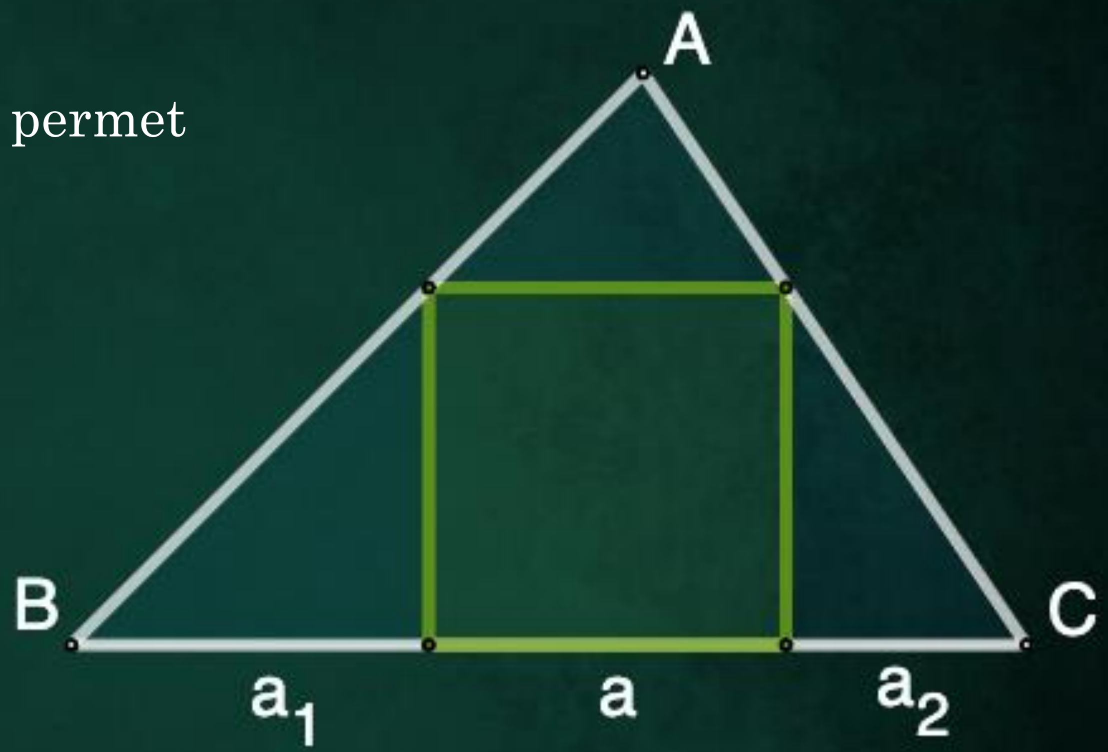
$$a_1 = \frac{a}{\tan B} \ \& \ a_2 = \frac{a}{\tan C}$$

Sachant que $BC = a + a_1 + a_2$

$$BC = a + \frac{a}{\tan B} + \frac{a}{\tan C} = a(1 + \tan^{-1} B + \tan^{-1} C)$$

On peut enfin en déduire a :

$$\boldsymbol{a = \frac{BC}{1 + tan^{-1} B + tan^{-1} C}}$$



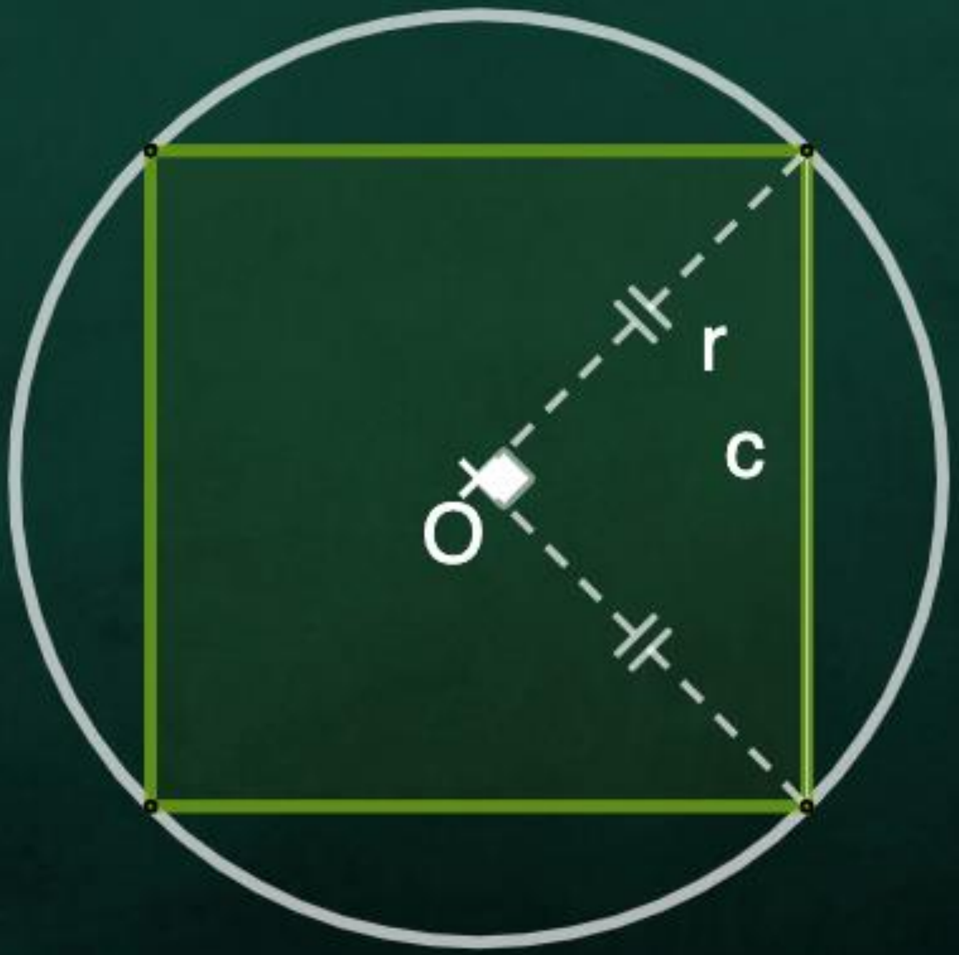
Cette méthode est correcte. Toutefois, elle ne nous donne pas *concrètement* de technique de construction du carré dans un triangle, mais *simplement* une relation entre angles et longueurs qui n'apporte rien.

DÉMARCHES ADOPTÉES :

Cas 1 :

La pâte a une forme circulaire

Modélisons la situation par la figure ci-contre :

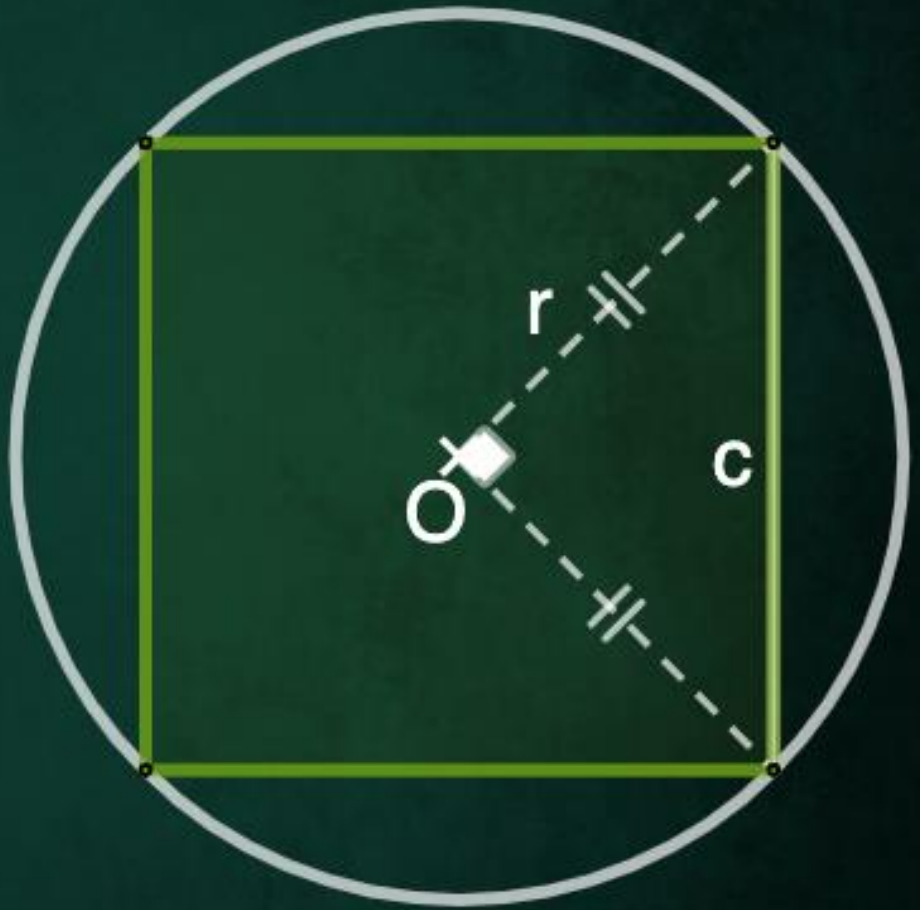


La pâte étant de forme circulaire, son rayon r est donc connu.

Nous recherchons donc une valeur de c en fonction de r.

Chacun des 4 sommets du carré appartient au cercle, ses demi-diagonales sont donc des rayons de ce dernier.

D’autre part, les diagonales d’un carré étant orthogonales, les deux rayons représentés forment ainsi un triangle rectangle en O.



Selon le théorème de Pythagore…

$$c^2 = 2r^2$$

$$c = \sqrt{2r^2}$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{2}r}$$

Problématique finale:

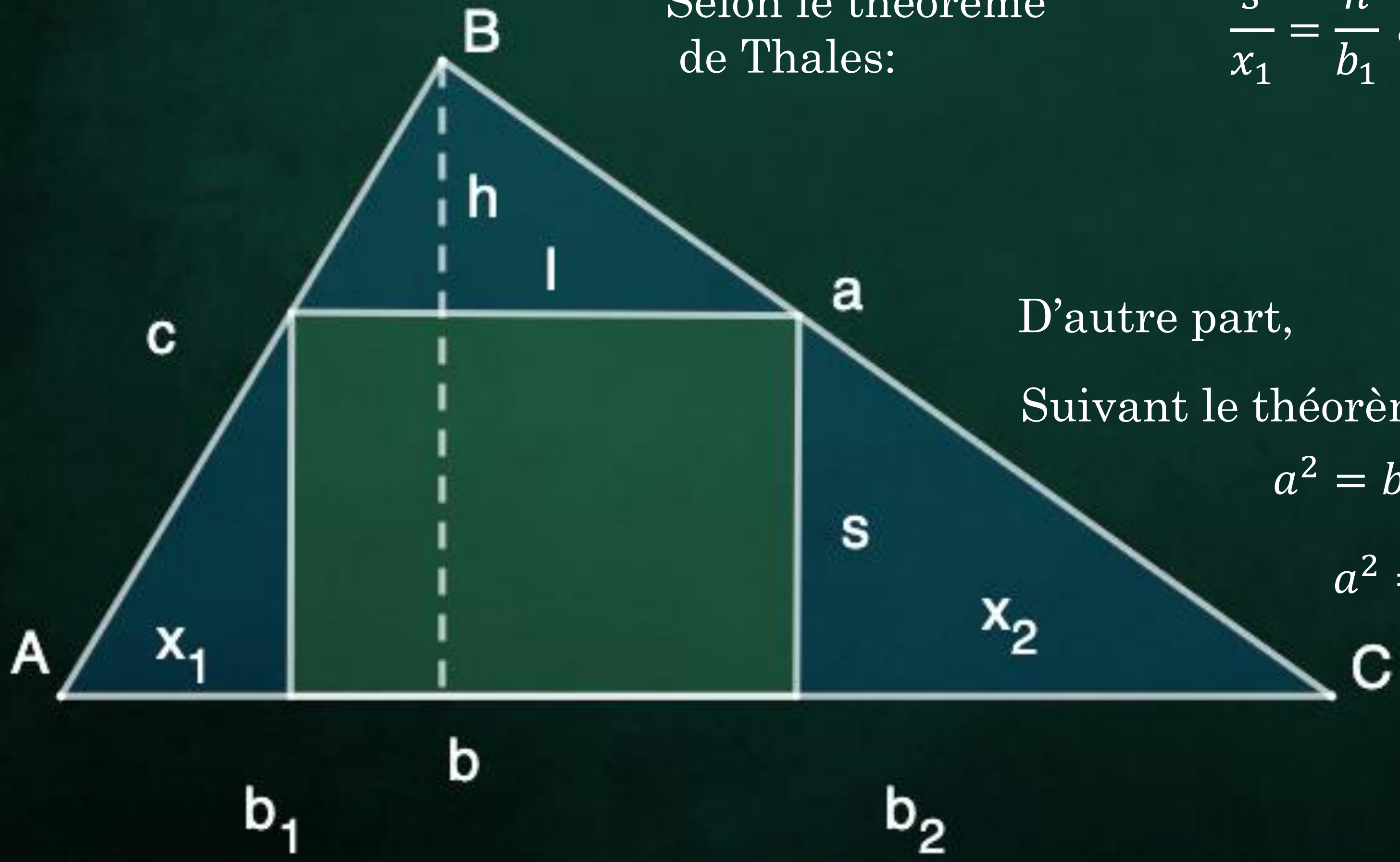
Comment inscrire dans un triangle quelconque un carré ayant 2 sommets consécutifs sur un côté du triangle, et les deux autres sommets sur chacun des deux autres côtés ?

Cas 2 :

La pâte a une forme triangulaire

Partir d'un rectangle pour obtenir un carré ?

$s = x_1 \tan \hat{A} = x_2 \tan \hat{C}$ $\Rightarrow \tan \hat{A} = \frac{s}{x_1}$ & $\tan \hat{C} = \frac{s}{x_2}$



Selon le théorème de Thales: $\frac{s}{x_1} = \frac{h}{b_1}$ & $\frac{s}{x_2} = \frac{h}{b_2}$

$$\boldsymbol{s = x_1 * \frac{h}{b_1} = x_2 * \frac{h}{b_2}}$$

D'autre part, $\cos \hat{A} = \frac{b_1}{c}$ & $\cos \hat{C} = \frac{b_2}{a}$

Suivant le théorème d'Al-Kashi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\hat{A} \quad \& \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cancel{c}\frac{b_1}{\cancel{c}} \quad \& \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\cancel{a}b\frac{b_2}{\cancel{a}}$$

$$\boldsymbol{b_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}} \quad \& \quad \boldsymbol{b_2 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}}$$

Par ailleurs, selon le théorème de Pythagore:

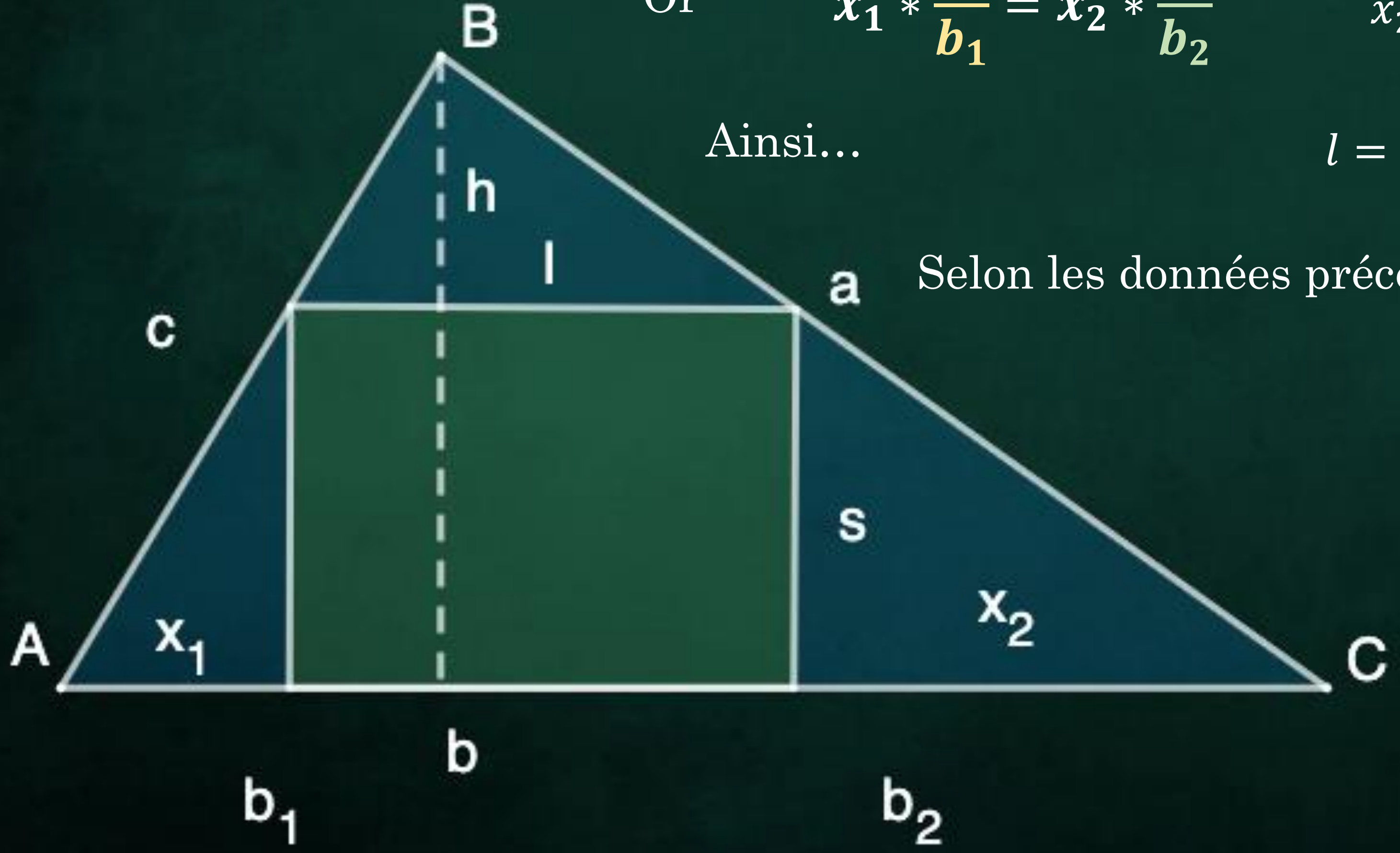
$$h^2 + b_1^2 = c^2 \quad \& \quad h^2 + b^2 = a^2$$

$$\boldsymbol{h = \sqrt{c^2 - b_1^2} = \sqrt{a^2 - b_2^2}}$$

Pour en revenir à l : $\boldsymbol{l = b - x_1 - x_2}$

Or $\boldsymbol{x_1 * \frac{h}{b_1} = x_2 * \frac{h}{b_2}}$ $\quad x_2 = \frac{\cancel{h}}{b_1} * x_1 * \frac{b_2}{\cancel{h}} = \boldsymbol{\frac{b_2}{b_1} * x_1}$

Ainsi… $\quad l = b - x_1 - \frac{b_2}{b_1} * x_1 = b - x_1(1 + \frac{b_2}{b_1})$

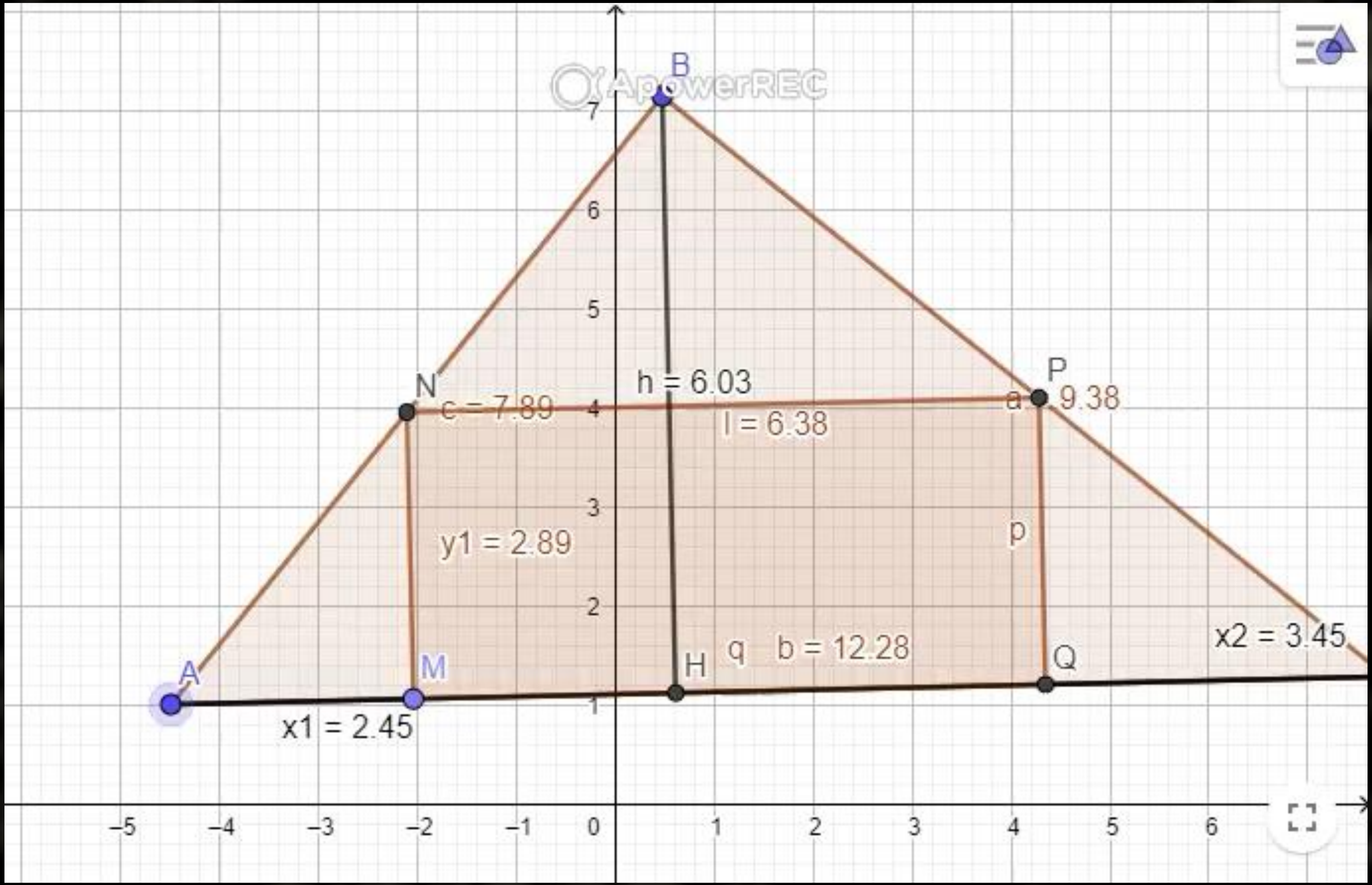


Selon les données précédemment démontrées…

$$l = b - x_1(1 + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2})$$

$$\boldsymbol{l = b - \frac{2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} * x_1}$$

La longueur l est une fonction affine de la longueur x_1



B
ApowerREC
N
c = 7.89
h = 6.03
P
a = 9.38
l = 6.38
y1 = 2.89
p
q
b = 12.28
H
Q
x2 = 3.45
A
M
x1 = 2.45

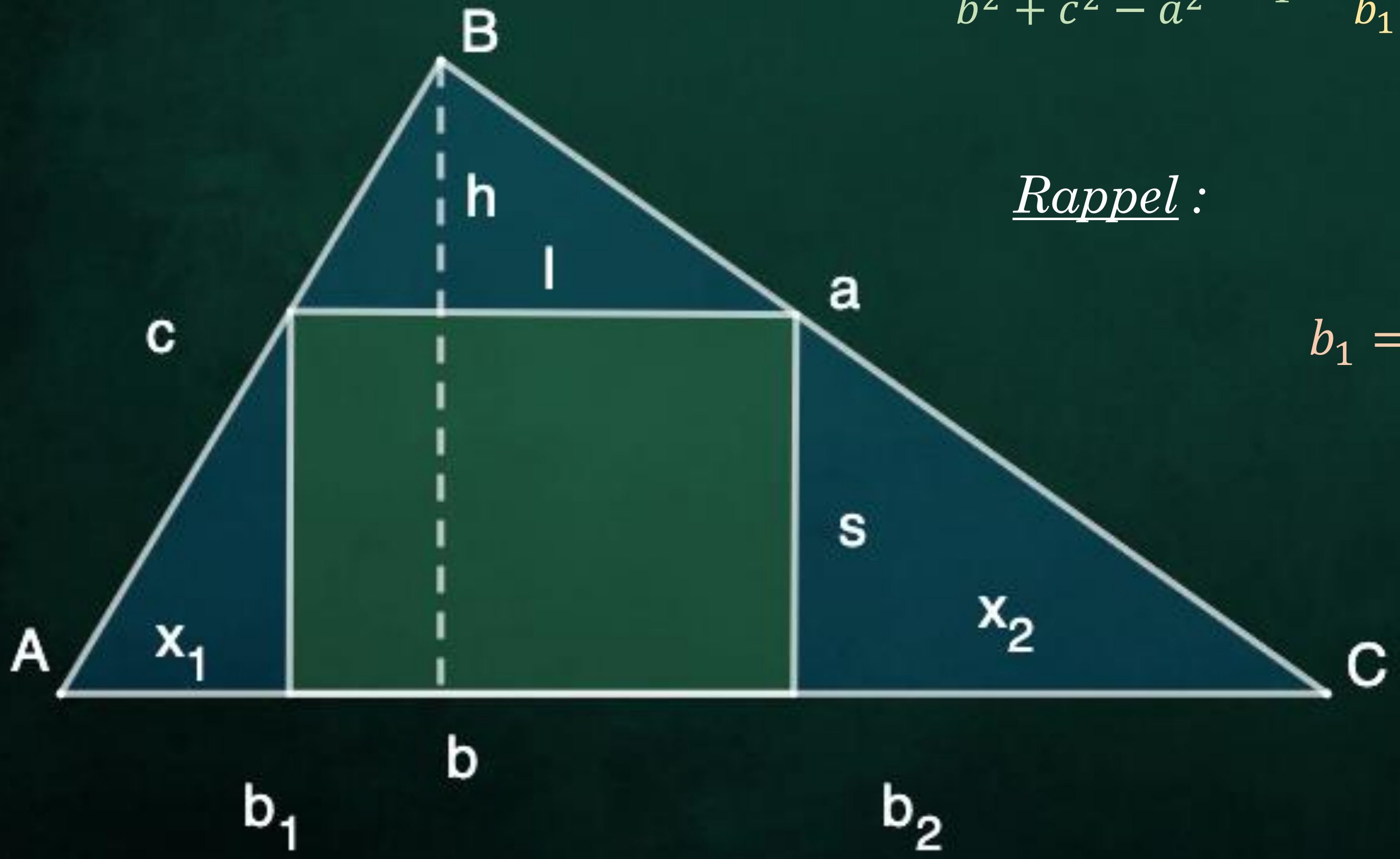
Ainsi, le rectangle s'avèrera être carré à la condition que $l = s$

Comme il a été démontré précédemment :

$$l = b - \frac{2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} * x_1 \quad \& \quad s = \frac{h}{b_1} * x_1$$

Il s'agit désormais de résoudre l'égalité :

$$b - \frac{2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} * x_1 = \frac{h}{b_1} * x_1$$



<u>*Rappel*</u> :

$$b_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

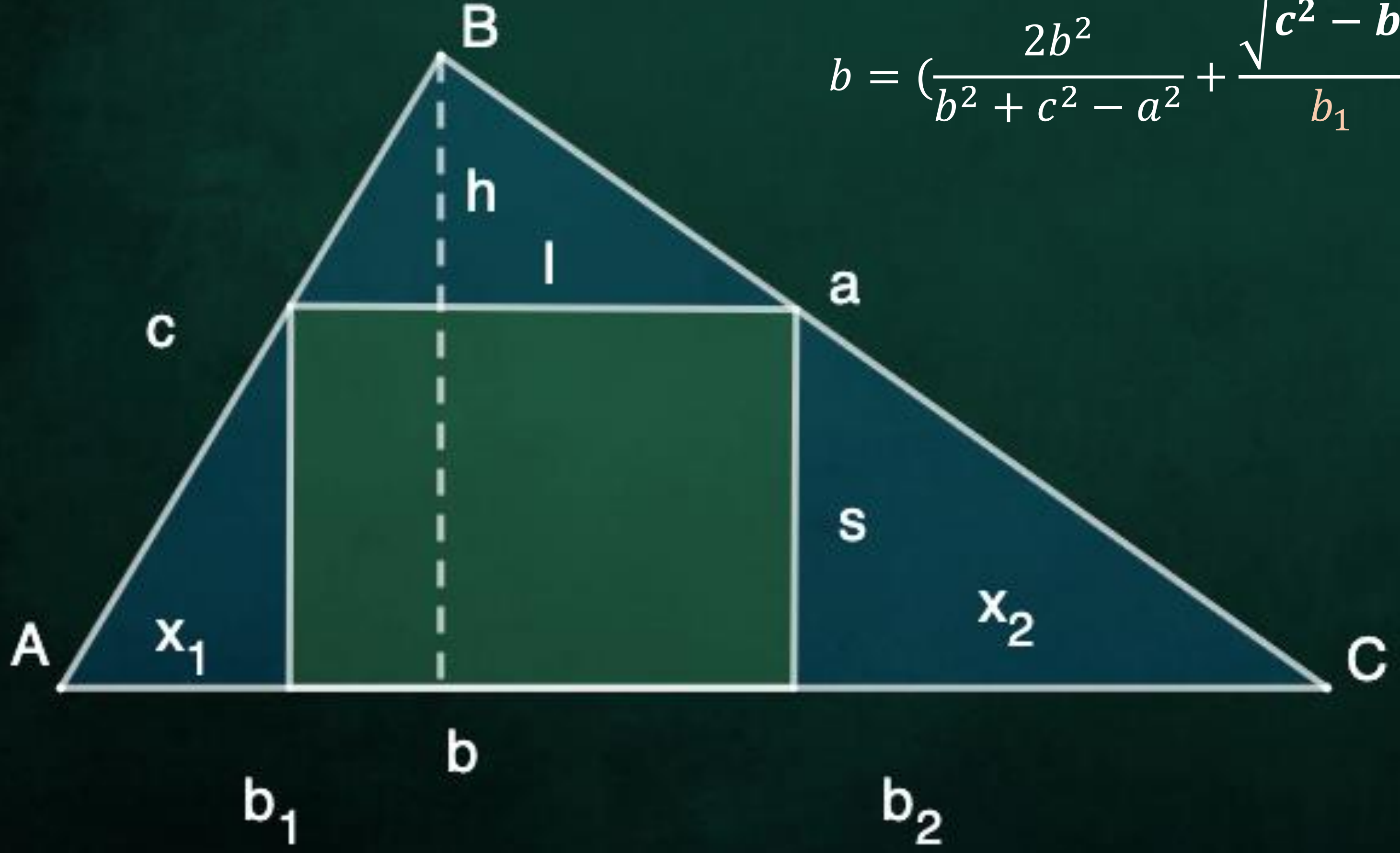
$$h = \sqrt{c^2 - b_1^2}$$

Ainsi :

$$b - \frac{2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} * x_1 = \frac{h}{b_1} * x_1$$

$$b - \frac{2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} * x_1 = \frac{\sqrt{\boldsymbol{c^2 - b_1^2}}}{b_1} * x_1$$

$$b = \left(\frac{2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{\sqrt{\boldsymbol{c^2 - b_1^2}}}{b_1}\right) * x_1$$



$$x_1 = b : \left(\frac{2b^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{\sqrt{c^2 - b_1^2}}{(b^2 + c^2 - a^2) * \frac{1}{2b}}\right)$$

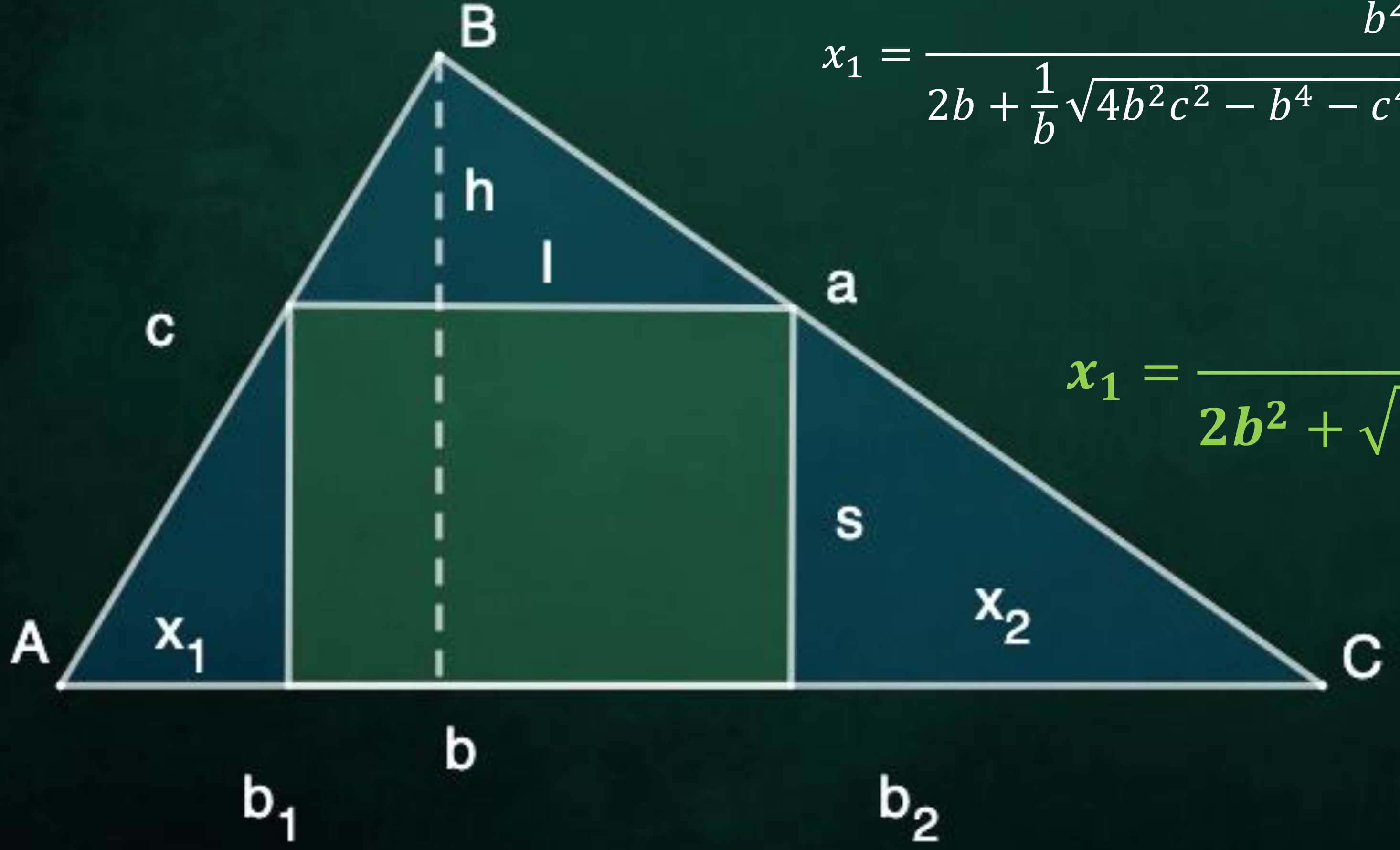
$$x_1 = b : \frac{2b^2 + 2b\sqrt{c^2 - b_1^2}}{b^2 + c^2 - a^2}$$

$$x_1 = \frac{b * (b^2 + c^2 - a^2)}{2b^2 + 2b\sqrt{c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2}}$$

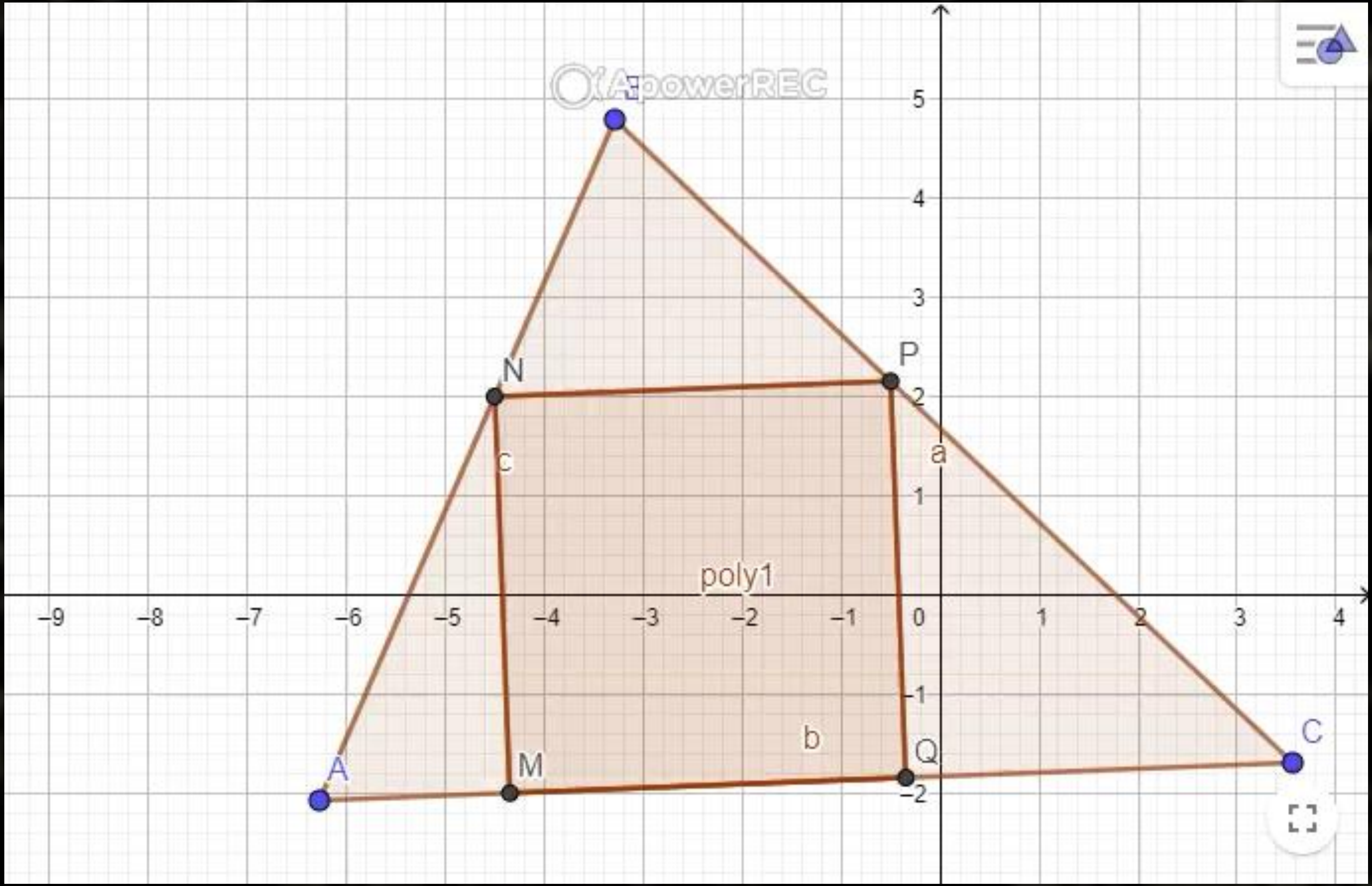
$$x_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b + 2\sqrt{c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2}}$$

$$x_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b + 2\sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^4 + c^4 - a^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2}}}$$

$$x_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b + \frac{1}{b}\sqrt{4b^2c^2 - b^4 - c^4 + a^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2}}$$



$$\boldsymbol{x_1 = \frac{b^3 + bc^2 - a^2b}{2b^2 + \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}}$$



ApowerREC
B
A
C
N
P
M
Q
a
b
c
poly1

CONCLUSION :

La problématique abordée laissant place à un champs de résultats excessivement vaste, nous avons choisi de limiter nos recherches afin de nous focaliser sur deux cas particuliers:

Le premier supposant que la pâte est de forme circulaire.

Le second supposant qu'elle est de forme triangulaire.

Ce n’est pas sans une certaine fierté que nos prospections ont finalement abouti à deux formules traitant respectivement de chaque éventualités. Il est désormais possible à Chloé de préparer ses sablés en toute tranquillité d’esprit.

Toutefois, il est tout à fait envisageable d’élargir le problème à d’autres types de polygones : quadrilatère, pentagone, hexagone et j’en passe. Cependant, la solution dépendra à chaque fois de la nature de la forme étudiée.