Quelques problèmes élémentaires mais inextricables

Shalom Eliahou

Université du Littoral Côte d'Opale

Congrès MATh.en.Jeans

Valenciennes, 11 avril 2015

Introduction

Introduction

But aujourd'hui

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques,

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques, faciles à comprendre,

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques, faciles à comprendre, mais non-résolues et posant de **gros défis** aux chercheurs !

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques, faciles à comprendre, mais non-résolues et posant de **gros défis** aux chercheurs !

Au menu :

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques, faciles à comprendre, mais non-résolues et posant de **gros défis** aux chercheurs !

Au menu :

- Les nombres parfaits

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques, faciles à comprendre, mais non-résolues et posant de **gros défis** aux chercheurs !

Au menu :

- Les nombres parfaits
- Le problème $3n+1$ de Syracuse

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques, faciles à comprendre, mais non-résolues et posant de **gros défis** aux chercheurs !

Au menu :

- Les nombres parfaits
- Le problème $3n+1$ de Syracuse
- Les homards sont-ils gracieux ?

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques, faciles à comprendre, mais non-résolues et posant de **gros défis** aux chercheurs !

Au menu :

- Les nombres parfaits
- Le problème $3n+1$ de Syracuse
- Les homards sont-ils gracieux ?

Quelques mots sur les maths

Quelques mots sur les maths

- Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ?

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.)

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.) et les figures géométriques simples

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.) et les figures géométriques simples (carrés, triangles, cercles).

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.) et les figures géométriques simples (carrés, triangles, cercles).

• Mais ensuite, pour mieux comprendre ces premiers objets, il faut en introduire de nouveaux (nombres premiers, rationnels, réels, etc.).

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.) et les figures géométriques simples (carrés, triangles, cercles).

• Mais ensuite, pour mieux comprendre ces premiers objets, il faut en introduire de nouveaux (nombres premiers, rationnels, réels, etc.).

• Puis, pour mieux comprendre ces objets de 2ème génération, il faut en introduire d'autres encore

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.) et les figures géométriques simples (carrés, triangles, cercles).

• Mais ensuite, pour mieux comprendre ces premiers objets, il faut en introduire de nouveaux (nombres premiers, rationnels, réels, etc.).

• Puis, pour mieux comprendre ces objets de 2ème génération, il faut en introduire d'autres encore (fonctions, espaces vectoriels, probabilités, etc.).

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.) et les figures géométriques simples (carrés, triangles, cercles).

• Mais ensuite, pour mieux comprendre ces premiers objets, il faut en introduire de nouveaux (nombres premiers, rationnels, réels, etc.).

• Puis, pour mieux comprendre ces objets de 2ème génération, il faut en introduire d'autres encore (fonctions, espaces vectoriels, probabilités, etc.). *Ce processus se poursuit depuis des millénaires !*

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.) et les figures géométriques simples (carrés, triangles, cercles).

• Mais ensuite, pour mieux comprendre ces premiers objets, il faut en introduire de nouveaux (nombres premiers, rationnels, réels, etc.).

• Puis, pour mieux comprendre ces objets de 2ème génération, il faut en introduire d'autres encore (fonctions, espaces vectoriels, probabilités, etc.). *Ce processus se poursuit depuis des millénaires !*

Une science vivante

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,
- pour défier notre capacité collective à apporter des réponses.

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,
- pour défier notre capacité collective à apporter des réponses.

• Certains s'énoncent très facilement...

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,
- pour défier notre capacité collective à apporter des réponses.

• Certains s'énoncent très facilement... mais semblent insolubles !

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,
- pour défier notre capacité collective à apporter des réponses.

• Certains s'énoncent très facilement... mais semblent insolubles !

• Aujourd'hui, présentation de quelques exemples frappants :

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,
- pour défier notre capacité collective à apporter des réponses.

• Certains s'énoncent très facilement... mais semblent insolubles !

• Aujourd'hui, présentation de quelques exemples frappants : en arithmétique

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,
- pour défier notre capacité collective à apporter des réponses.

• Certains s'énoncent très facilement... mais semblent insolubles !

• Aujourd'hui, présentation de quelques exemples frappants : en arithmétique et en théorie des graphes.

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,
- pour défier notre capacité collective à apporter des réponses.

• Certains s'énoncent très facilement... mais semblent insolubles !

• Aujourd'hui, présentation de quelques exemples frappants : en arithmétique et en théorie des graphes.

Nombres premiers : petit rappel

Nombres premiers : petit rappel

- Un nombre premier est un nombre entier positif,

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1,

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7,

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11,

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13,

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17,

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19,

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Il y a une infinité de nombres premiers.

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Il y a une infinité de nombres premiers. De plus,

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Il y a une infinité de nombres premiers. De plus, tout nombre entier plus grand que 1 est un produit de nombres premiers.

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Il y a une infinité de nombres premiers. De plus, tout nombre entier plus grand que 1 est un produit de nombres premiers.

• **Exemples :**

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Il y a une infinité de nombres premiers. De plus, tout nombre entier plus grand que 1 est un produit de nombres premiers.

• **Exemples :** $28 = 2 \times 2 \times 7,$

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Il y a une infinité de nombres premiers. De plus, tout nombre entier plus grand que 1 est un produit de nombres premiers.

• **Exemples :** $28 = 2 \times 2 \times 7, \quad 30 = 2 \times 3 \times 5.$

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Il y a une infinité de nombres premiers. De plus, tout nombre entier plus grand que 1 est un produit de nombres premiers.

• **Exemples :** $28 = 2 \times 2 \times 7, \quad 30 = 2 \times 3 \times 5.$

Addition et multiplication

Addition et multiplication

- En arithmétique, l'addition toute seule,

Addition et multiplication

- En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule,

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble,

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

• **Exemples.**

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

• **Exemples.** $28 = 2 \times 2 \times 7$;

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

• **Exemples.** $28 = 2 \times 2 \times 7$; 29 est premier ;

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

• **Exemples.** $28 = 2 \times 2 \times 7$; 29 est premier ; $30 = 2 \times 3 \times 5$;

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

• **Exemples.** $28 = 2 \times 2 \times 7$; 29 est premier ; $30 = 2 \times 3 \times 5$; 31 est premier ;

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

• **Exemples.** $28 = 2 \times 2 \times 7$; 29 est premier ; $30 = 2 \times 3 \times 5$; 31 est premier ; $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$;

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

• **Exemples.** $28 = 2 \times 2 \times 7$; 29 est premier ; $30 = 2 \times 3 \times 5$; 31 est premier ; $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$; $33 = 3 \times 11$, etc.

I. Les nombres parfaits

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif *n* qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$.

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3.

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \ =$$

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1+2+3 \;=\; 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \;=\; 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$.

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \ = \ 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \;=\; 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1,

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2,

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4,

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1+2+3 \ = \ 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \;=\; 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14.

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \ = \ 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14. Sommons-les :

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \; = \; 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14. Sommons-les :

$$1 + 2$$

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3.
Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \ = \ 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14.
Sommons-les :

$$1 + 2 + 4$$

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14. Sommons-les :

$$1 + 2 + 4 + 7$$

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3.
Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \ = \ 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14.
Sommons-les :

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 \ =$$

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14. Sommons-les :

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3. Sommons-les :

$$1 + 2 + 3 \;=\; 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14. Sommons-les :

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 \;=\; 28.$$

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Ils ont découvert les quatre plus petits nombres parfaits :

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Ils ont découvert les quatre plus petits nombres parfaits : 6, 28, 496, 8128.

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Ils ont découvert les quatre plus petits nombres parfaits : 6, 28, 496, 8128.

Question

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Ils ont découvert les quatre plus petits nombres parfaits : 6, 28, 496, 8128.

Question

Existe-t-il un nombre parfait impair ?

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Ils ont découvert les quatre plus petits nombres parfaits : 6, 28, 496, 8128.

Question

Existe-t-il un nombre parfait impair ?

• Cette question reste ouverte depuis 2000 ans !

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Ils ont découvert les quatre plus petits nombres parfaits : 6, 28, 496, 8128.

Question

Existe-t-il un nombre parfait impair ?

• Cette question reste ouverte depuis 2000 ans !

• On pense que la réponse est **non**, mais on ne sait pas (encore) le démontrer.

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Ils ont découvert les quatre plus petits nombres parfaits : 6, 28, 496, 8128.

Question

Existe-t-il un nombre parfait impair ?

• Cette question reste ouverte depuis 2000 ans !

• On pense que la réponse est **non**, mais on ne sait pas (encore) le démontrer.

Quelques résultats

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ est un nombre parfait.

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Si $2^n - 1$ *est un nombre premier, alors* $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ *est un nombre parfait.*

Exemples

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ est un nombre parfait.

Exemples

$$6 = 2^1 \times (2^2 - 1)$$

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ est un nombre parfait.

Exemples

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1 \times (2^2 - 1) \\ 28 &= 2^2 \times (2^3 - 1) \end{aligned}$$

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Si $2^n - 1$ *est un nombre premier, alors* $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ *est un nombre parfait.*

Exemples

$$
\begin{aligned}
6 &= 2^1 \times (2^2 - 1) \\
28 &= 2^2 \times (2^3 - 1) \\
496 &= 2^4 \times (2^5 - 1)
\end{aligned}
$$

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Si $2^n - 1$ *est un nombre premier, alors* $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ *est un nombre parfait.*

Exemples

$$
\begin{aligned}
6 &= 2^1 \times (2^2 - 1) \\
28 &= 2^2 \times (2^3 - 1) \\
496 &= 2^4 \times (2^5 - 1) \\
8218 &= 2^6 \times (2^7 - 1)
\end{aligned}
$$

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ est un nombre parfait.

Exemples

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1 \times (2^2 - 1) \\ 28 &= 2^2 \times (2^3 - 1) \\ 496 &= 2^4 \times (2^5 - 1) \\ 8218 &= 2^6 \times (2^7 - 1) \end{aligned}$$

La réciproque est vraie aussi !

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

*Réciproquement, si N est un nombre parfait **pair**,*

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

Réciproquement, si N est un nombre parfait ***pair****, alors forcément*
$N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

*Réciproquement, si N est un nombre parfait **pair**, alors forcément $N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre premier.*

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

Réciproquement, si N est un nombre parfait ***pair****, alors forcément* $N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ *où* $2^n - 1$ *est un nombre premier.*

Definition

Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ s'appellent les premiers de Mersenne.

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

Réciproquement, si N est un nombre parfait ***pair****, alors forcément $N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre premier.*

Definition

Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ s'appellent les premiers de Mersenne.

• Il y a donc une correspondance parfaite entre nombre parfaits pairs et premiers de Mersenne.

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

*Réciproquement, si N est un nombre parfait **pair**, alors forcément $N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre premier.*

Definition

Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ s'appellent les premiers de Mersenne.

• Il y a donc une correspondance parfaite entre nombre parfaits pairs et premiers de Mersenne.

• A ce jour, on connaît 48 premiers de Mersenne, et donc 48 nombres parfaits pairs.

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

*Réciproquement, si N est un nombre parfait **pair**, alors forcément $N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre premier.*

Definition

Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ s'appellent les premiers de Mersenne.

• Il y a donc une correspondance parfaite entre nombre parfaits pairs et premiers de Mersenne.

• A ce jour, on connaît 48 premiers de Mersenne, et donc 48 nombres parfaits pairs.

Liens avec le monde actuel

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

• Il a été découvert le 25 janvier 2013, par le Great Internet Mersenne Prime Search.

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

• Il a été découvert le 25 janvier 2013, par le Great Internet Mersenne Prime Search. Il s'agit de

$$2^{57\,885\,161} - 1,$$

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

• Il a été découvert le 25 janvier 2013, par le Great Internet Mersenne Prime Search. Il s'agit de

$$2^{57\,885\,161} - 1,$$

un nombre premier à plus de 17 millions de chiffres !

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

• Il a été découvert le 25 janvier 2013, par le Great Internet Mersenne Prime Search. Il s'agit de

$$2^{57\,885\,161} - 1,$$

un nombre premier à plus de 17 millions de chiffres !

Question

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

• Il a été découvert le 25 janvier 2013, par le Great Internet Mersenne Prime Search. Il s'agit de

$$2^{57\,885\,161} - 1,$$

un nombre premier à plus de 17 millions de chiffres !

Question

Existe-t-il une infinité de premiers de Mersenne ?

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

• Il a été découvert le 25 janvier 2013, par le Great Internet Mersenne Prime Search. Il s'agit de

$$2^{57\,885\,161} - 1,$$

un nombre premier à plus de 17 millions de chiffres !

Question

Existe-t-il une infinité de premiers de Mersenne ?

On n'en sait rien !

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

• Il a été découvert le 25 janvier 2013, par le Great Internet Mersenne Prime Search. Il s'agit de

$$2^{57\,885\,161} - 1,$$

un nombre premier à plus de 17 millions de chiffres !

Question

Existe-t-il une infinité de premiers de Mersenne ?

On n'en sait rien !

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4,$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1,$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10,$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2,$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16,$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22,$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction :

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \dots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m,

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \ \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $\quad 1 \longmapsto$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \dots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto 4$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \ \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto 4 \longmapsto 2$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \ \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto \ldots$

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto \ldots$

Appelons trajectoire de m la suite ainsi obtenue.

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \quad \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto \ldots$

Appelons trajectoire de m la suite ainsi obtenue.

Exemples

Exemples

$1 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto$

Exemples

$\color{red}{1} \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \ldots$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \dots$

$9 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \ \dots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \dots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \ldots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto 7 \longmapsto \ldots$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \ldots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto 7 \longmapsto \ldots$

$15 \mapsto 46 \mapsto 23 \mapsto 70 \mapsto 35 \mapsto 106 \mapsto 53 \mapsto 160 \mapsto 80 \mapsto 40 \mapsto \ldots$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \dots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto 7 \longmapsto \dots$

$15 \mapsto 46 \mapsto 23 \mapsto 70 \mapsto 35 \mapsto 106 \mapsto 53 \mapsto 160 \mapsto 80 \mapsto 40 \mapsto \dots$

$19 \longmapsto 58 \longmapsto 29 \longmapsto 88 \longmapsto 44 \longmapsto 22 \longmapsto 11 \longmapsto \dots$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \dots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto 7 \longmapsto \dots$

$15 \mapsto 46 \mapsto 23 \mapsto 70 \mapsto 35 \mapsto 106 \mapsto 53 \mapsto 160 \mapsto 80 \mapsto 40 \mapsto \dots$

$19 \longmapsto 58 \longmapsto 29 \longmapsto 88 \longmapsto 44 \longmapsto 22 \longmapsto 11 \longmapsto \dots$

$21 \longmapsto 64 \longmapsto 32 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \dots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto 7 \longmapsto \dots$

$15 \mapsto 46 \mapsto 23 \mapsto 70 \mapsto 35 \mapsto 106 \mapsto 53 \mapsto 160 \mapsto 80 \mapsto 40 \mapsto \dots$

$19 \longmapsto 58 \longmapsto 29 \longmapsto 88 \longmapsto 44 \longmapsto 22 \longmapsto 11 \longmapsto \dots$

$21 \longmapsto 64 \longmapsto 32 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$25 \longmapsto 76 \longmapsto 38 \longmapsto 19 \longmapsto \dots$

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \ldots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto 7 \longmapsto \ldots$

$15 \mapsto 46 \mapsto 23 \mapsto 70 \mapsto 35 \mapsto 106 \mapsto 53 \mapsto 160 \mapsto 80 \mapsto 40 \mapsto \ldots$

$19 \longmapsto 58 \longmapsto 29 \longmapsto 88 \longmapsto 44 \longmapsto 22 \longmapsto 11 \longmapsto \ldots$

$21 \longmapsto 64 \longmapsto 32 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$25 \longmapsto 76 \longmapsto 38 \longmapsto 19 \longmapsto \ldots$

La conjecture de Syracuse

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La trajectoire de tout entier positif m finit toujours par atteindre 1.

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La trajectoire de tout entier positif m finit toujours par atteindre 1.

- Vrai ou faux ?

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La trajectoire de tout entier positif m finit toujours par atteindre 1.

- Vrai ou faux ?

- C'est sûrement vrai –

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La trajectoire de tout entier positif m finit toujours par atteindre 1.

- Vrai ou faux ?

- C'est sûrement vrai — mais personne ne sait le démontrer !

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La trajectoire de tout entier positif m finit toujours par atteindre 1.

- Vrai ou faux ?
- C'est sûrement vrai — mais personne ne sait le démontrer !
- Calculez la trajectoire de 27, elle vaut la peine !

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La trajectoire de tout entier positif m finit toujours par atteindre 1.

- Vrai ou faux ?
- C'est sûrement vrai — mais personne ne sait le démontrer !
- Calculez la trajectoire de 27, elle vaut la peine !
- Cette conjecture est facile à tester sur calculatrice ou ordinateur.

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La trajectoire de tout entier positif m finit toujours par atteindre 1.

- Vrai ou faux ?
- C'est sûrement vrai — mais personne ne sait le démontrer !
- Calculez la trajectoire de 27, elle vaut la peine !
- Cette conjecture est facile à tester sur calculatrice ou ordinateur.

Record actuel, par ordinateur

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

5

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000$$

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000$$

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000$$

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000$$

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000,$$

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000,$$

c'est-à-dire jusqu'à 5 milliards de milliards !

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000,$$

c'est-à-dire jusqu'à 5 milliards de milliards !

Autrement dit, en partant de n'importe quel m inférieur à 5 trillions,

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000,$$

c'est-à-dire jusqu'à 5 milliards de milliards !

Autrement dit, en partant de n'importe quel m inférieur à 5 trillions, sa trajectoire finit bien par atteindre 1.

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000,$$

c'est-à-dire jusqu'à 5 milliards de milliards !

Autrement dit, en partant de n'importe quel m inférieur à 5 trillions, sa trajectoire finit bien par atteindre 1.

Résultat obtenu par Tomás Oliveira e Silva.

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000,$$

c'est-à-dire jusqu'à 5 milliards de milliards !

Autrement dit, en partant de n'importe quel m inférieur à 5 trillions, sa trajectoire finit bien par atteindre 1.

Résultat obtenu par Tomás Oliveira e Silva. Ses ordinateurs testent un milliard d'entiers par seconde ! Voir

$$www.ieeta.pt/\sim tos/3x+1$$

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000,$$

c'est-à-dire jusqu'à 5 milliards de milliards !

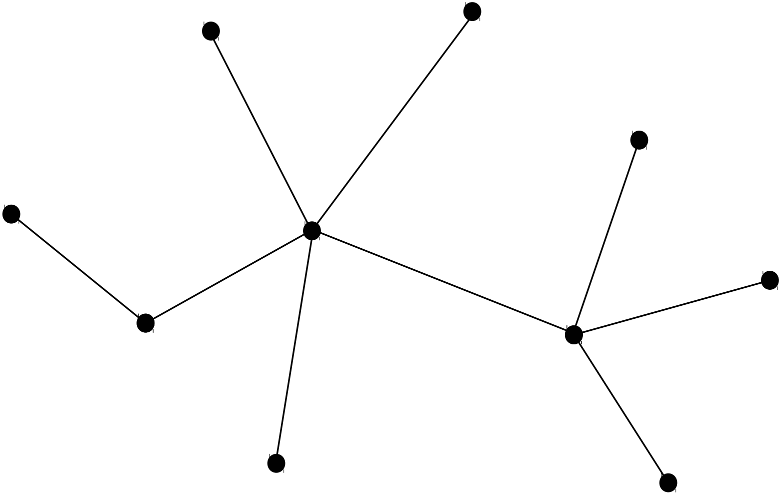
Autrement dit, en partant de n'importe quel m inférieur à 5 trillions, sa trajectoire finit bien par atteindre 1.

Résultat obtenu par Tomás Oliveira e Silva. Ses ordinateurs testent un milliard d'entiers par seconde ! Voir

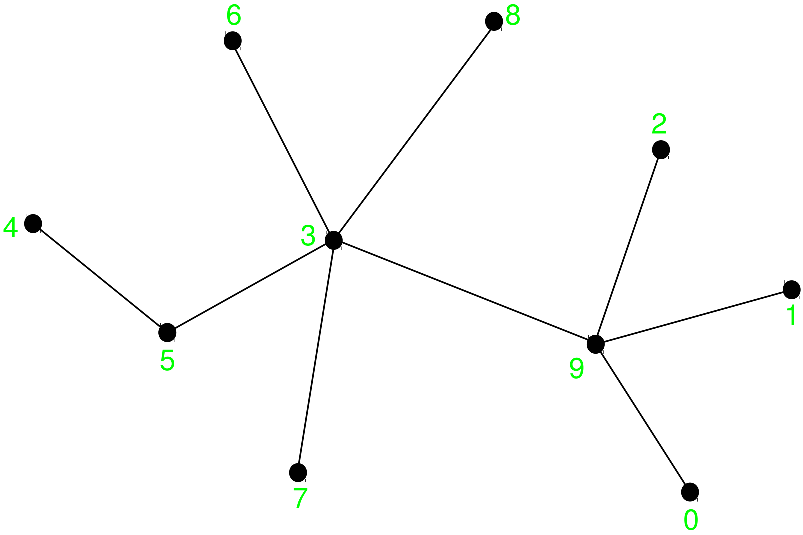
$$www.ieeta.pt/\sim tos/3x+1$$

III. Les homards sont-ils gracieux ?

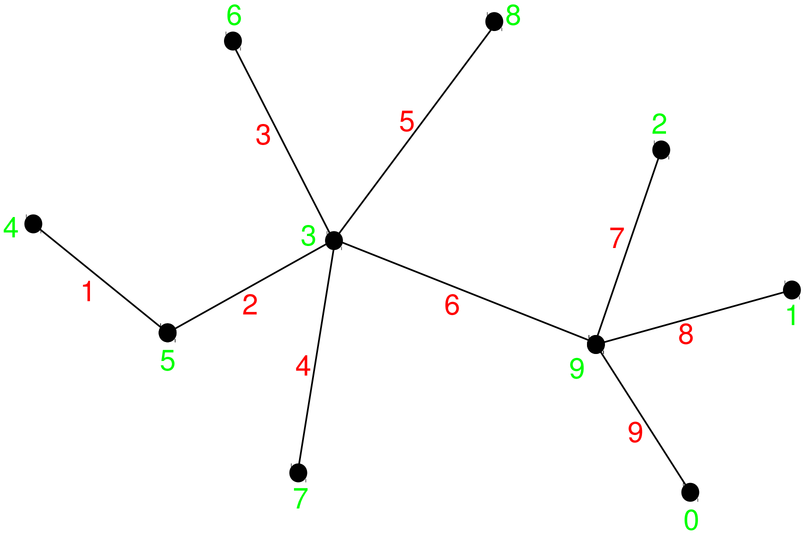
III. Les homards sont-ils gracieux ?



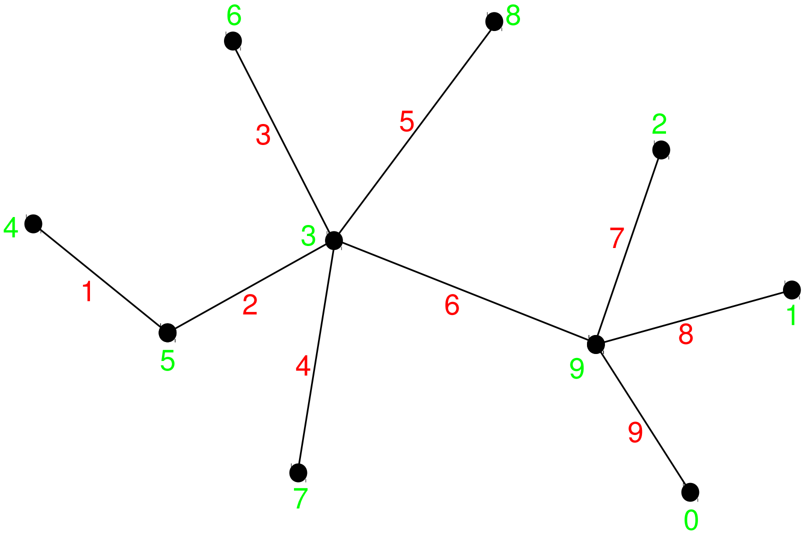
III. Les homards sont-ils gracieux ?



III. Les homards sont-ils gracieux ?



III. Les homards sont-ils gracieux ?



Un peu de vocabulaire

Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

- de points appelés sommets,

Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

- de points appelés sommets,
- d'arêtes reliant des paires de sommets.

Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

- de points appelés sommets,
- d'arêtes reliant des paires de sommets.

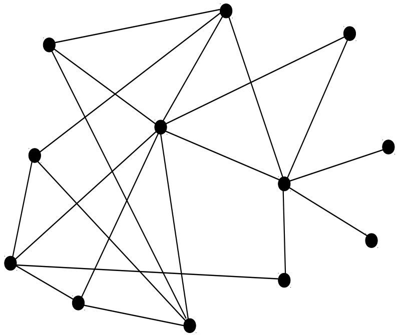
Exemple.

Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

- de points appelés sommets,
- d'arêtes reliant des paires de sommets.

Exemple.

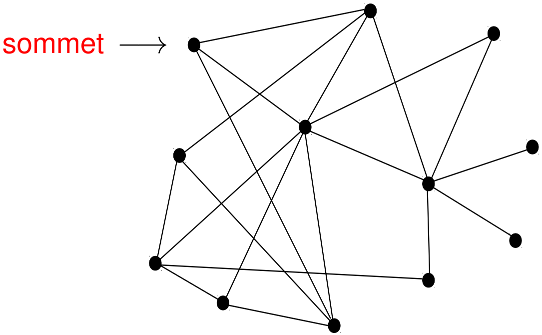


Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

- de points appelés sommets,
- d'arêtes reliant des paires de sommets.

Exemple.

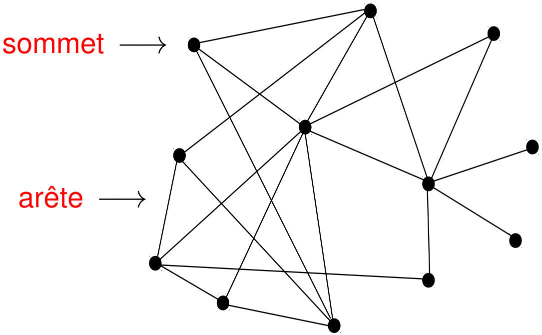


Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

- de points appelés sommets,
- d'arêtes reliant des paires de sommets.

Exemple.

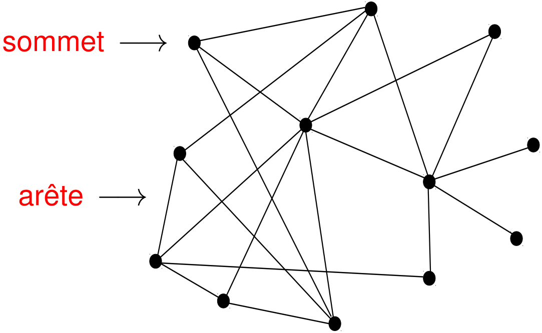


Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

- de points appelés sommets,
- d'arêtes reliant des paires de sommets.

Exemple.



Réseaux

Réseaux

Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

Réseaux

Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

- les réseaux routiers

Réseaux

Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

- les réseaux routiers
- les réseaux téléphoniques

Réseaux

Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

- les réseaux routiers
- les réseaux téléphoniques
- les réseaux sociaux

Réseaux

Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

- les réseaux routiers
- les réseaux téléphoniques
- les réseaux sociaux
- les filiations généalogiques

Réseaux

Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

- les réseaux routiers
- les réseaux téléphoniques
- les réseaux sociaux
- les filiations généalogiques
- les circuits électroniques

Réseaux

Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

- les réseaux routiers
- les réseaux téléphoniques
- les réseaux sociaux
- les filiations généalogiques
- les circuits électroniques
- etc.

Réseaux

Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

- les réseaux routiers
- les réseaux téléphoniques
- les réseaux sociaux
- les filiations généalogiques
- les circuits électroniques
- etc.

Exemple : le graphe d'Internet

Exemple : le graphe d'Internet

Internet peut être modélisé par un graphe.

Exemple : le graphe d'Internet

Internet peut être modélisé par un graphe.

- Ses sommets sont les pages du web ;

Exemple : le graphe d'Internet

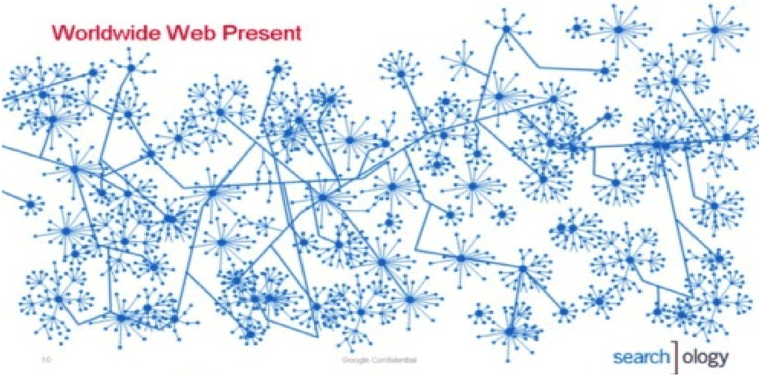
Internet peut être modélisé par un graphe.

- Ses sommets sont les pages du web ;
- Ses arêtes sont les hyperliens.

Exemple : le graphe d'Internet

Internet peut être modélisé par un graphe.

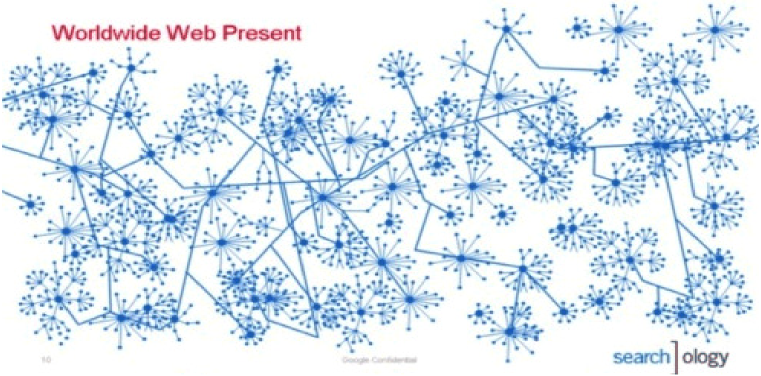
- Ses sommets sont les pages du web ;
- Ses arêtes sont les hyperliens.

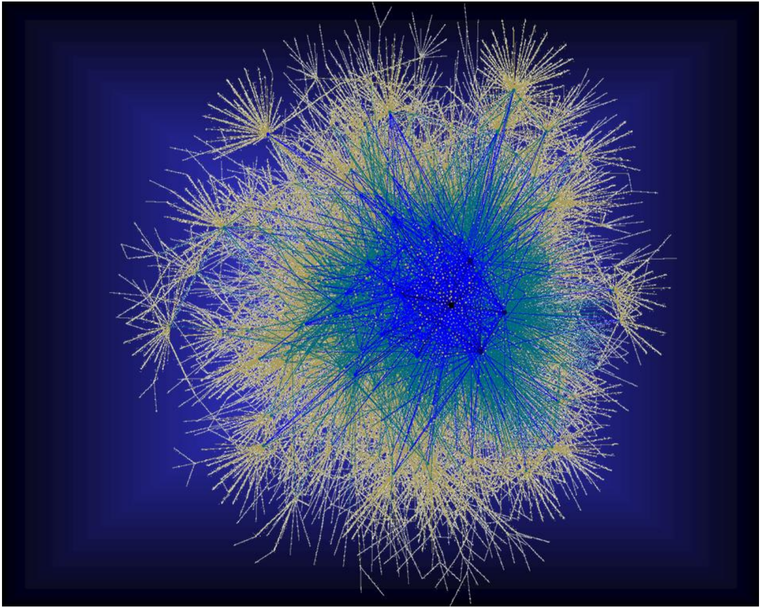


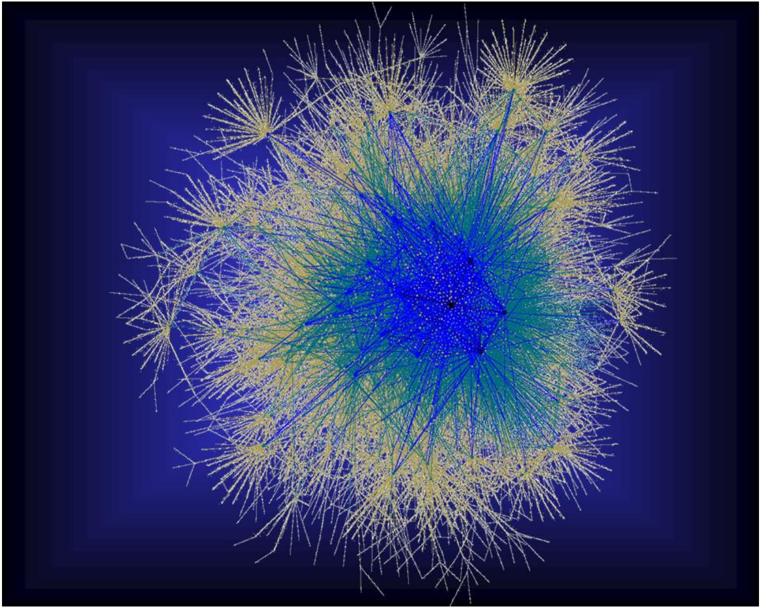
Exemple : le graphe d'Internet

Internet peut être modélisé par un graphe.

- Ses sommets sont les pages du web ;
- Ses arêtes sont les hyperliens.







Graphes spéciaux

Graphes spéciaux

Il y a toutes sortes de graphes :

Graphes spéciaux

Il y a toutes sortes de graphes : chemins,

Graphes spéciaux

Il y a toutes sortes de graphes : chemins, cycles,

Graphes spéciaux

Il y a toutes sortes de graphes : chemins, cycles, arbres, etc.

Graphes spéciaux

Il y a toutes sortes de graphes : chemins, cycles, arbres, etc.

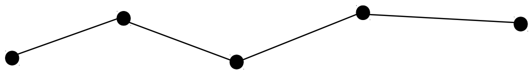
Qu'est-ce qu'un chemin ?

Graphes spéciaux

Il y a toutes sortes de graphes : chemins, cycles, arbres, etc.

Qu'est-ce qu'un chemin ?

C'est un graphe de cette forme :

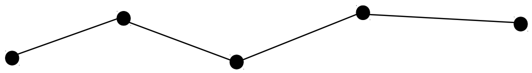


Graphes spéciaux

Il y a toutes sortes de graphes : chemins, cycles, arbres, etc.

Qu'est-ce qu'un chemin ?

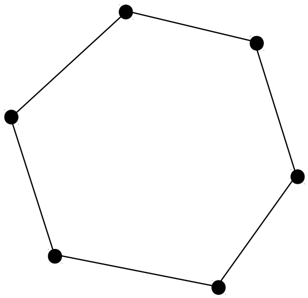
C'est un graphe de cette forme :



Qu’est-ce qu’un cycle ?

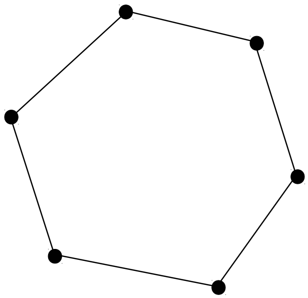
Qu'est-ce qu'un cycle ?

C'est un graphe de cette forme :



Qu'est-ce qu'un cycle ?

C'est un graphe de cette forme :



Qu’est-ce qu’un arbre ?

Qu'est-ce qu'un arbre ?

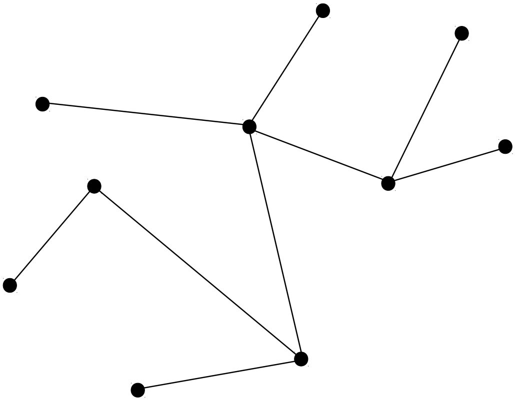
C'est un graphe en un seul morceau,

Qu'est-ce qu'un arbre ?

C'est un graphe en un seul morceau, sans cycles.

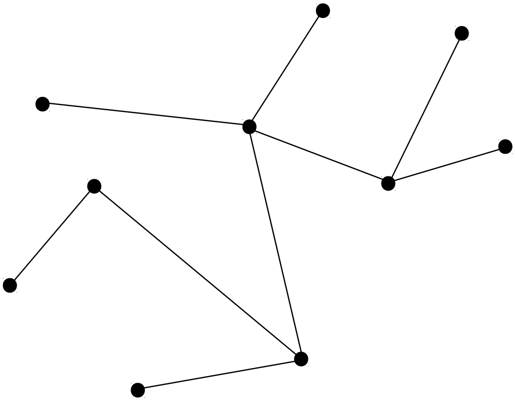
Qu'est-ce qu'un arbre ?

C'est un graphe en un seul morceau, sans cycles.



Qu'est-ce qu'un arbre ?

C'est un graphe en un seul morceau, sans cycles.



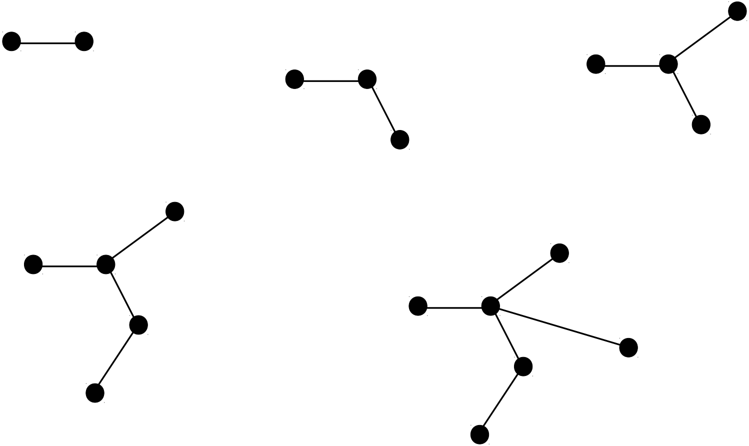
Un théorème de base

Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n-1$ arêtes.

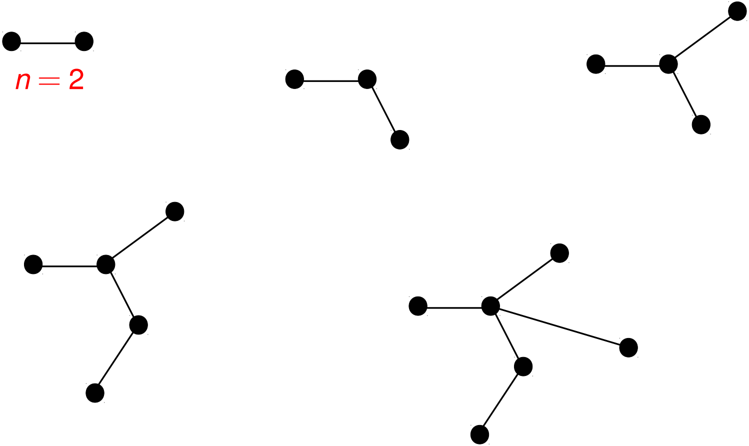
Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n-1$ arêtes.



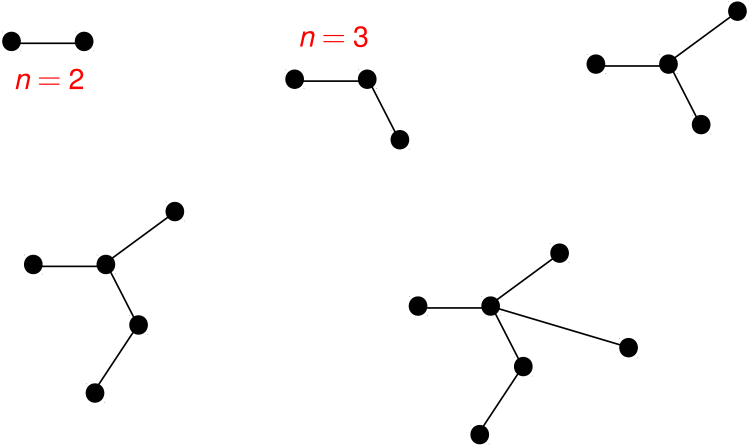
Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n-1$ arêtes.



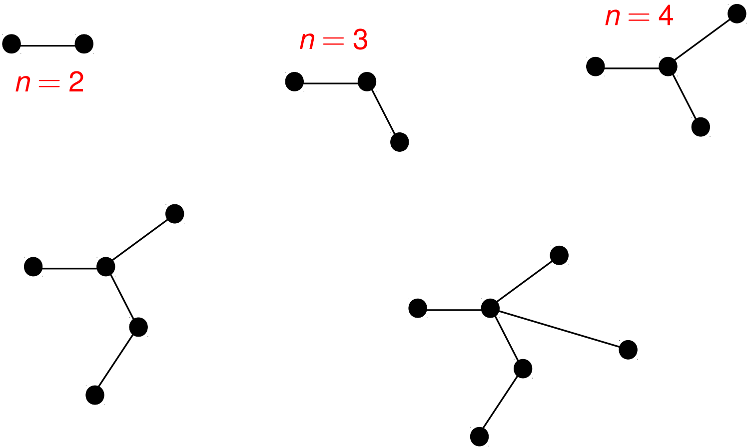
Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n-1$ arêtes.



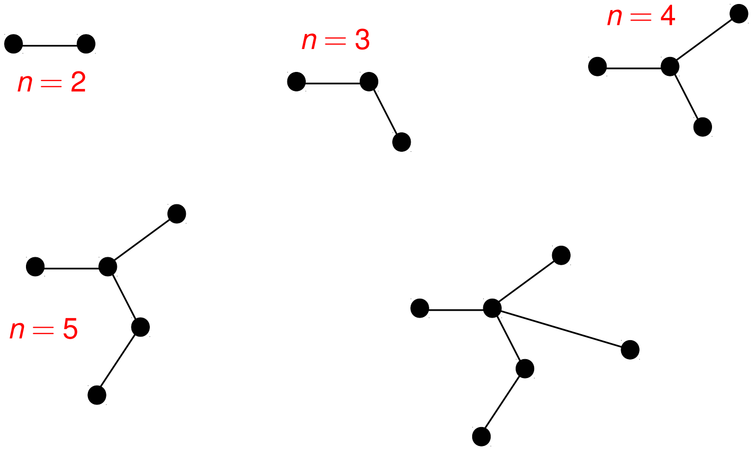
Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n-1$ arêtes.



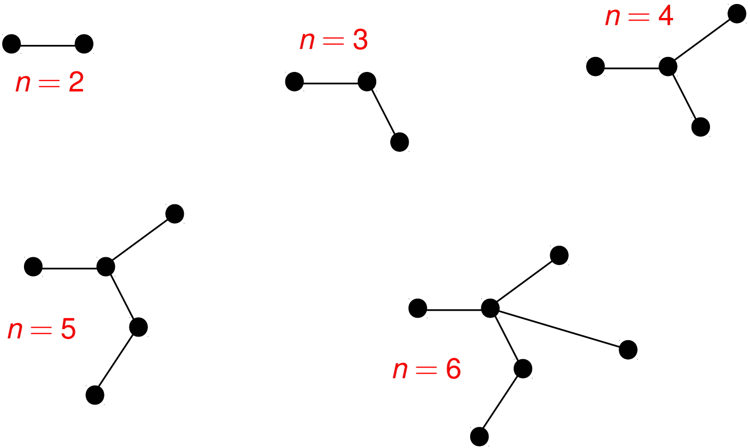
Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n - 1$ arêtes.



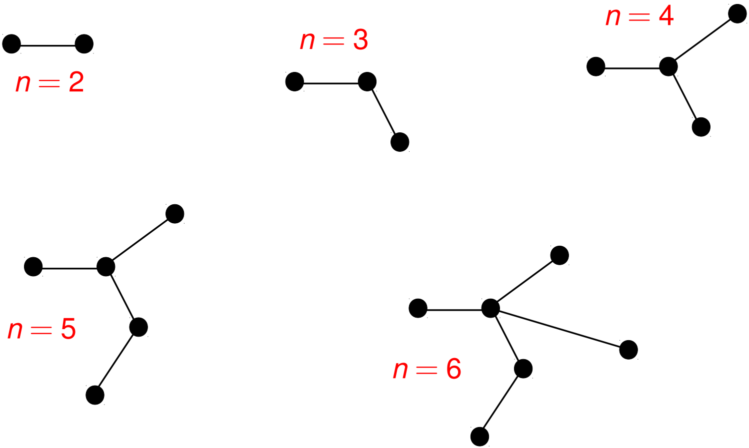
Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n-1$ arêtes.



Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n-1$ arêtes.



Numérotation induite

Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n} - 1$.

Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Règle du jeu

Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n} - 1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Règle du jeu

Le numéro assigné à une arête est la **différence positive** des numéros de ses sommets.

Numérotation induite

Prenons un arbre G à n sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $n-1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Règle du jeu

Le numéro assigné à une arête est la **différence positive** des numéros de ses sommets.

Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Règle du jeu

Le numéro assigné à une arête est la **différence positive** des numéros de ses sommets.

Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n} - 1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Règle du jeu

Le numéro assigné à une arête est la **différence positive** des numéros de ses sommets.

Numérotation induite

Prenons un arbre G à n sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $n - 1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Règle du jeu

Le numéro assigné à une arête est la **différence positive** des numéros de ses sommets.

C'est la numérotation induite sur les arêtes.

Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Règle du jeu

Le numéro assigné à une arête est la **différence positive** des numéros de ses sommets.

C'est la numérotation induite sur les arêtes.

Numérotations gracieuses

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant,

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n} - 1$.

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.

Numérotations gracieuses

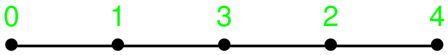
Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

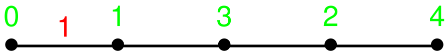
On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.



Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

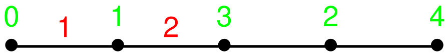
On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.



Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

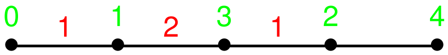
On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.



Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

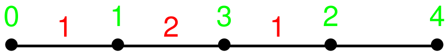
On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.



Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n} - 1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.

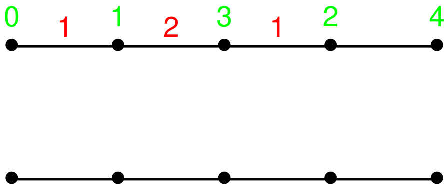


pas gracieuse :-(

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.

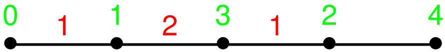


pas gracieuse :-(

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.

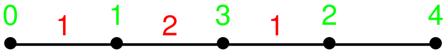


pas gracieuse :-(

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.

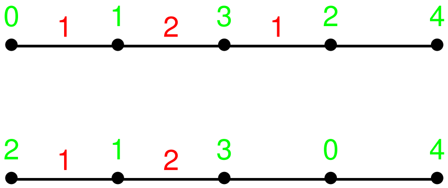


pas gracieuse :-(

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.

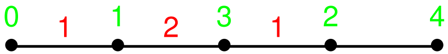


pas gracieuse :-(

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.

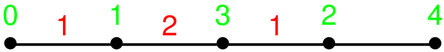


pas gracieuse :-(

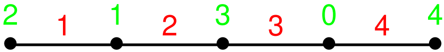
Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n} - 1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.



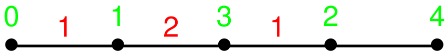
pas gracieuse :-(



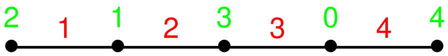
Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n} - 1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.



pas gracieuse :-(

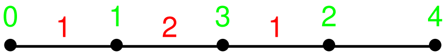


gracieuse :-))

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.



pas gracieuse :-(

gracieuse :-))

La Conjecture des Arbres Gracieux

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question.

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question. Quels arbres sont-ils gracieux ?

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question. Quels arbres sont-ils gracieux ?

Conjecture (Alex Rosa, 1966)

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question. Quels arbres sont-ils gracieux ?

Conjecture (Alex Rosa, 1966)

Tout arbre est gracieux.

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question. Quels arbres sont-ils gracieux ?

Conjecture (Alex Rosa, 1966)

Tout arbre est gracieux.

Vrai ou faux ?

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question. Quels arbres sont-ils gracieux ?

Conjecture (Alex Rosa, 1966)

Tout arbre est gracieux.

Vrai ou faux ?

On pense que c'est **vrai**, mais...

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question. Quels arbres sont-ils gracieux ?

Conjecture (Alex Rosa, 1966)

Tout arbre est gracieux.

Vrai ou faux ?

On pense que c'est **vrai**, mais... personne ne sait le démontrer !

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question. Quels arbres sont-ils gracieux ?

Conjecture (Alex Rosa, 1966)

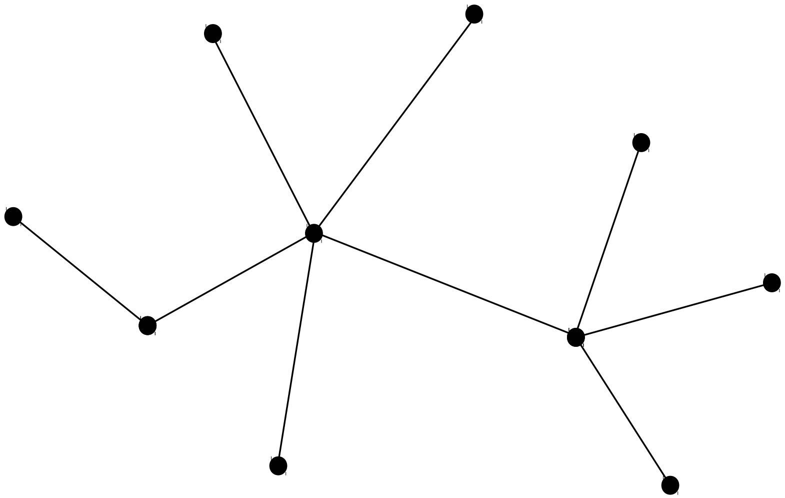
Tout arbre est gracieux.

Vrai ou faux ?

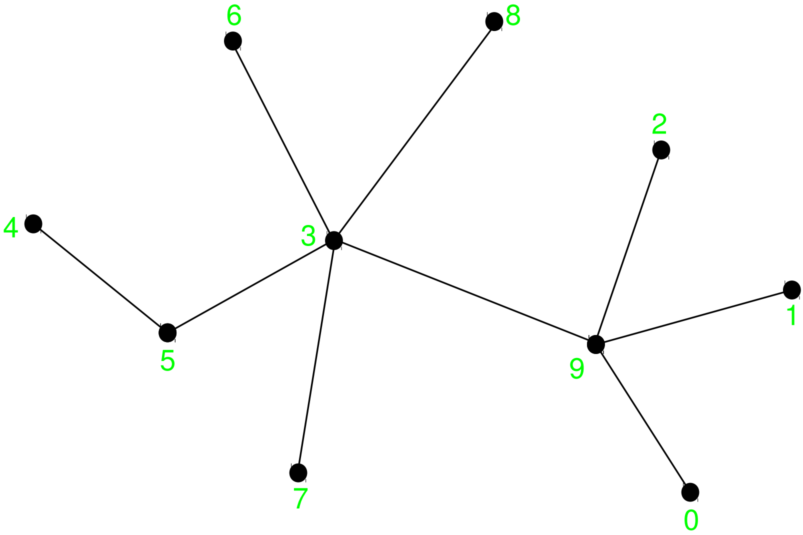
On pense que c'est **vrai**, mais... personne ne sait le démontrer !

Un exemple : gracieux ou pas ?

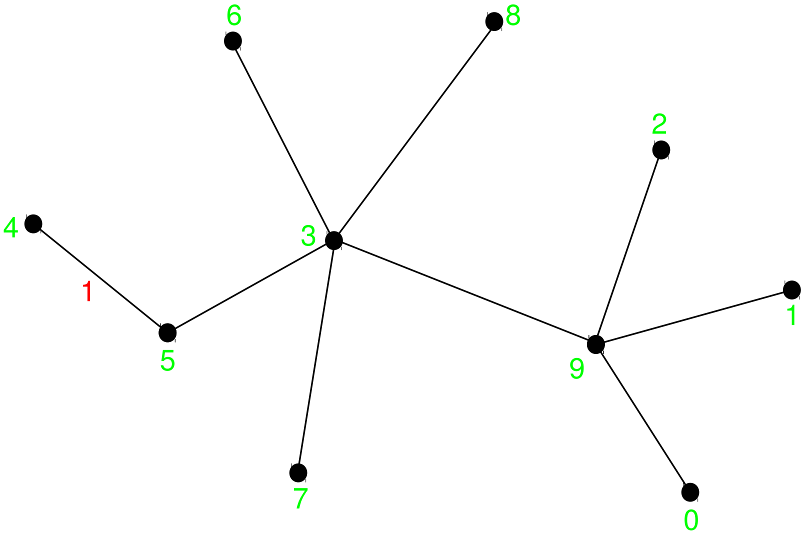
Un exemple : gracieux ou pas ?



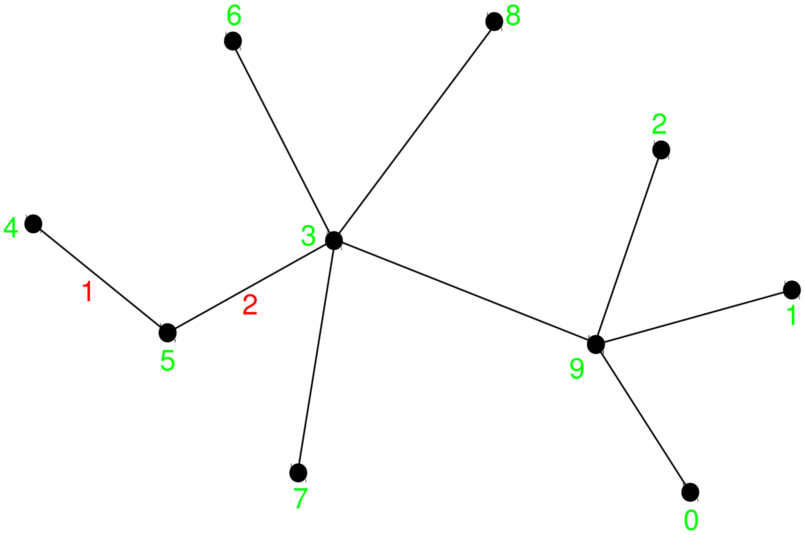
Un exemple : gracieux ou pas ?



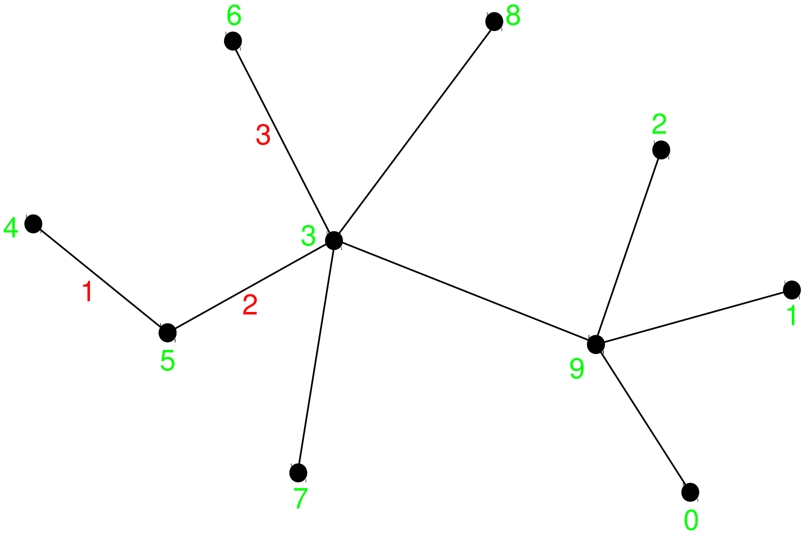
Un exemple : gracieux ou pas ?



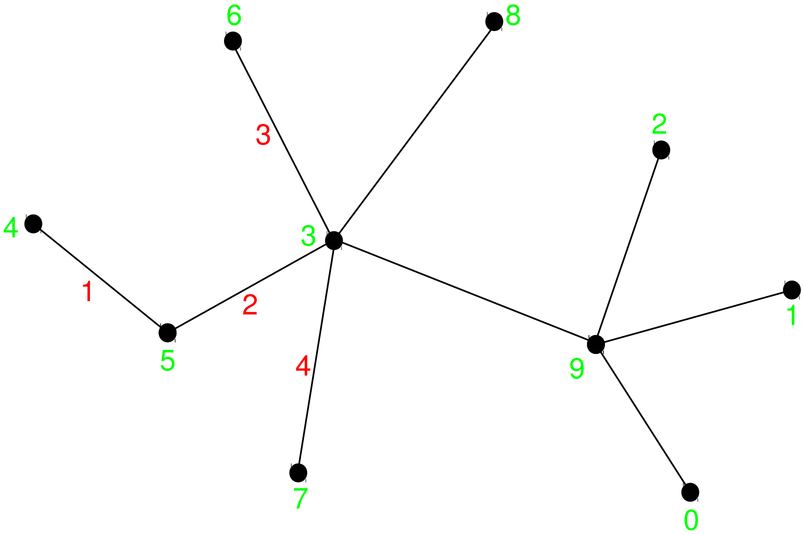
Un exemple : gracieux ou pas ?



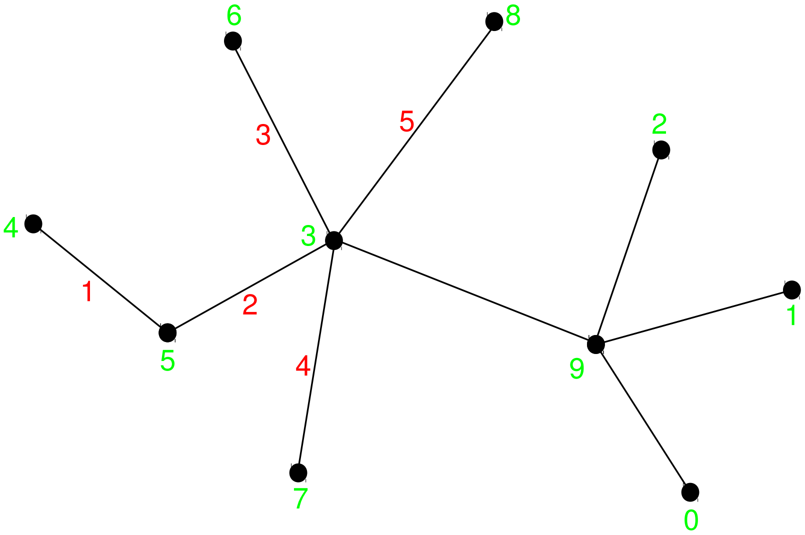
Un exemple : gracieux ou pas ?



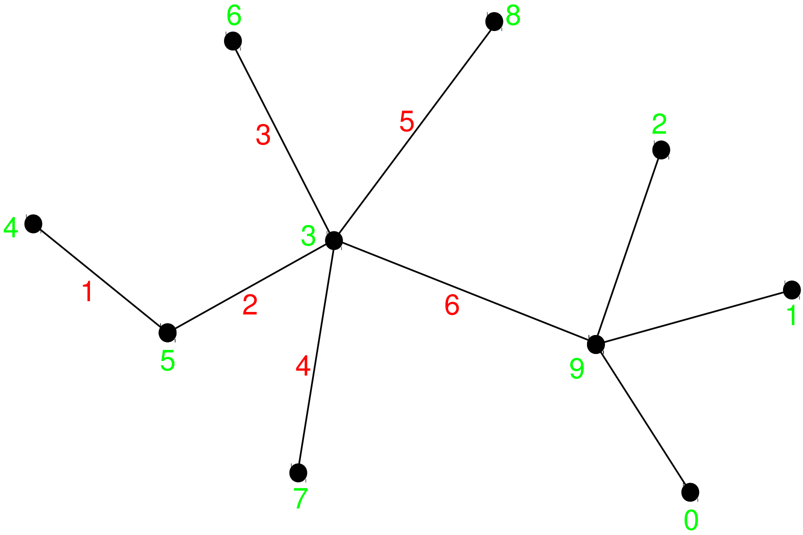
Un exemple : gracieux ou pas ?



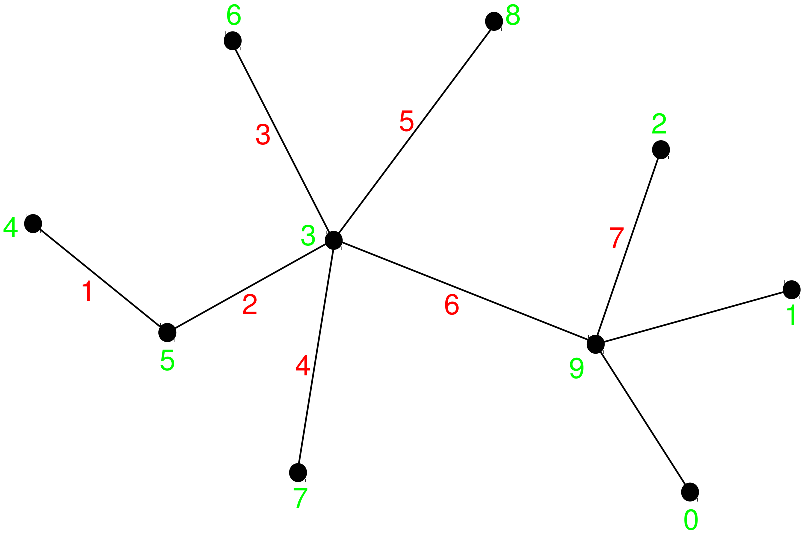
Un exemple : gracieux ou pas ?



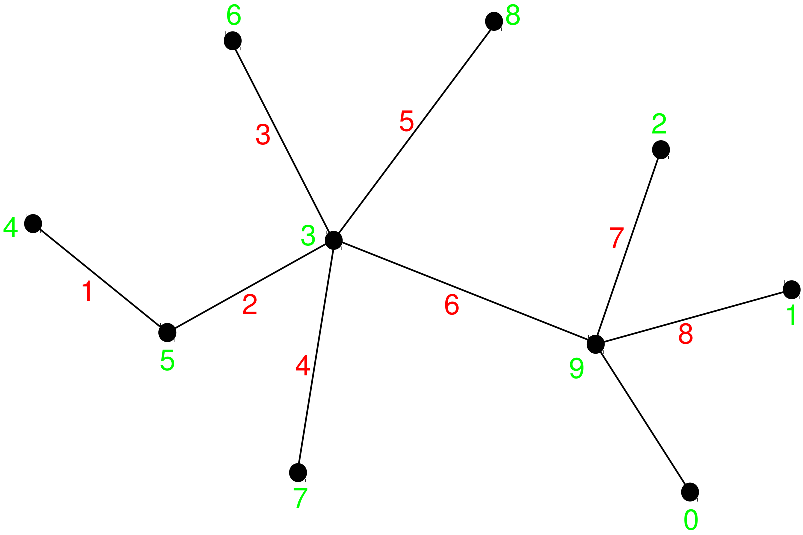
Un exemple : gracieux ou pas ?



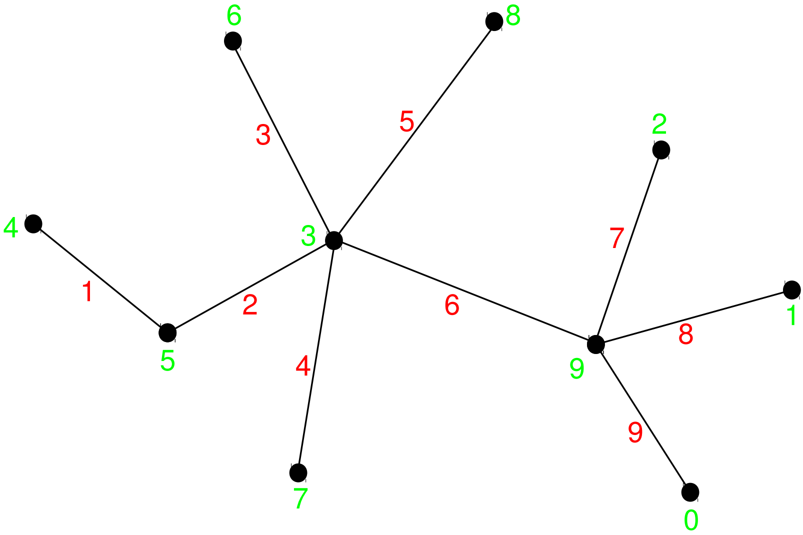
Un exemple : gracieux ou pas ?



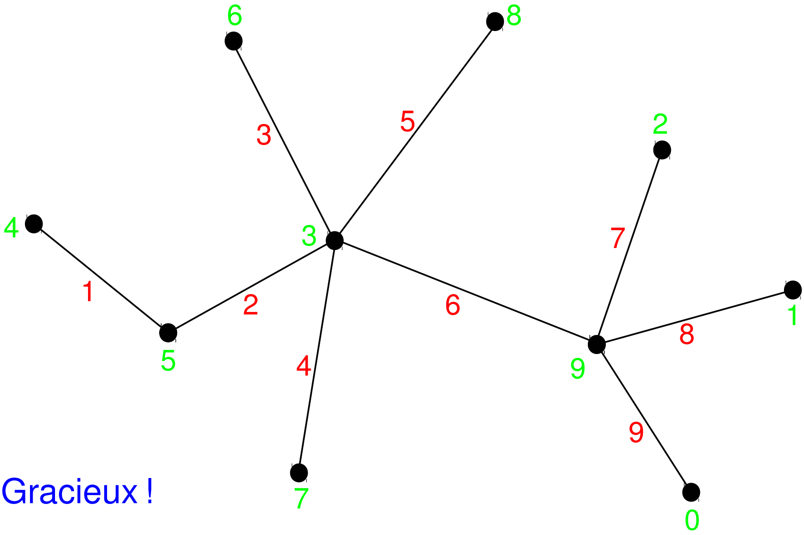
Un exemple : gracieux ou pas ?



Un exemple : gracieux ou pas ?

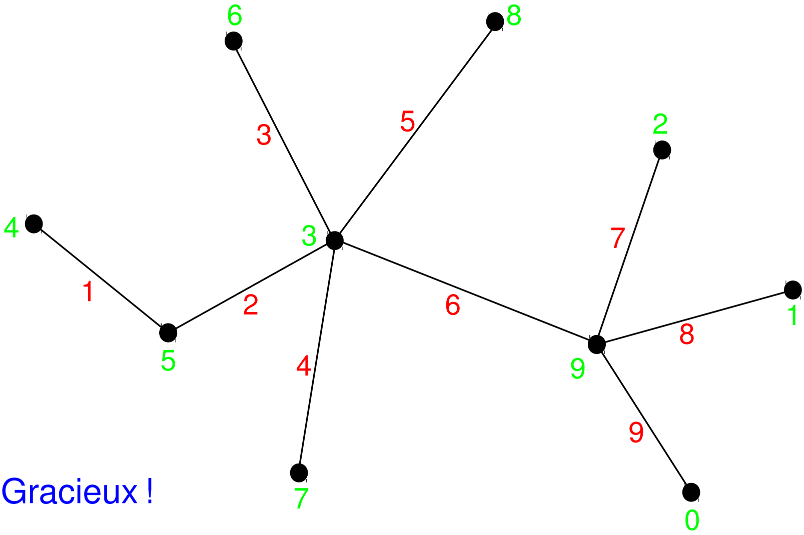


Un exemple : gracieux ou pas ?



Gracieux !

Un exemple : gracieux ou pas ?

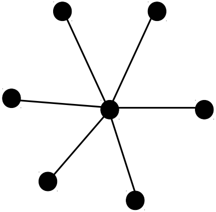


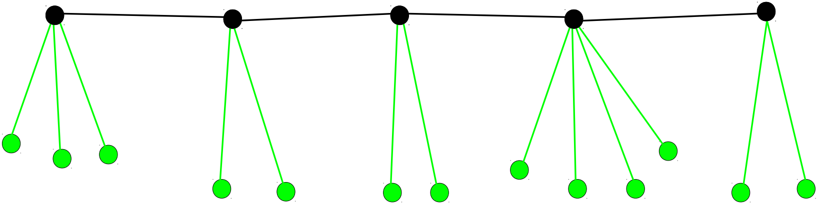
Gracieux !

Quelques arbres spéciaux

Quelques arbres spéciaux

Etoile

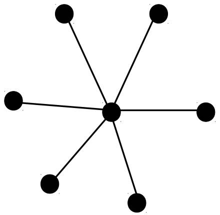


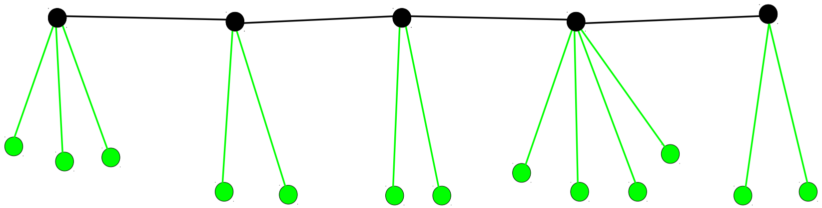


Chenille

Quelques arbres spéciaux

Etoile





Chenille

Que sait-on en 2015 ?

Que sait-on en 2015 ?

On sait démontrer que les arbres suivants sont gracieux :

Que sait-on en 2015 ?

On sait démontrer que les arbres suivants sont gracieux :

- tous les chemins

Que sait-on en 2015 ?

On sait démontrer que les arbres suivants sont gracieux :

- tous les chemins
- toutes les étoiles

Que sait-on en 2015 ?

On sait démontrer que les arbres suivants sont gracieux :

- tous les chemins
- toutes les étoiles
- toutes les chenilles

Que sait-on en 2015 ?

On sait démontrer que les arbres suivants sont gracieux :

- tous les chemins
- toutes les étoiles
- toutes les chenilles
- et par ordinateur...

Que sait-on en 2015 ?

On sait démontrer que les arbres suivants sont gracieux :

- tous les chemins
- toutes les étoiles
- toutes les chenilles
- et par ordinateur... jusqu'à 35 sommets.

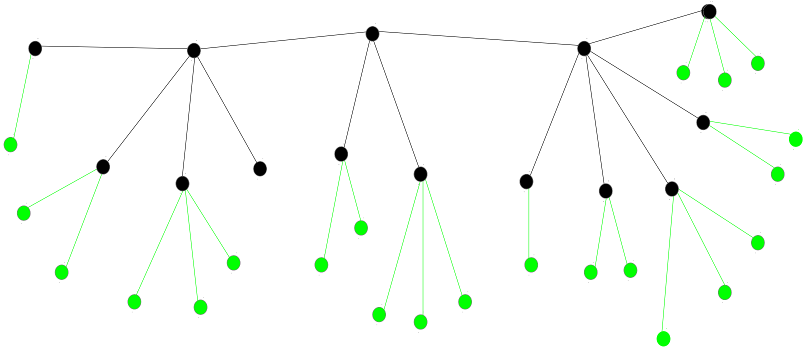
Que sait-on en 2015 ?

On sait démontrer que les arbres suivants sont gracieux :

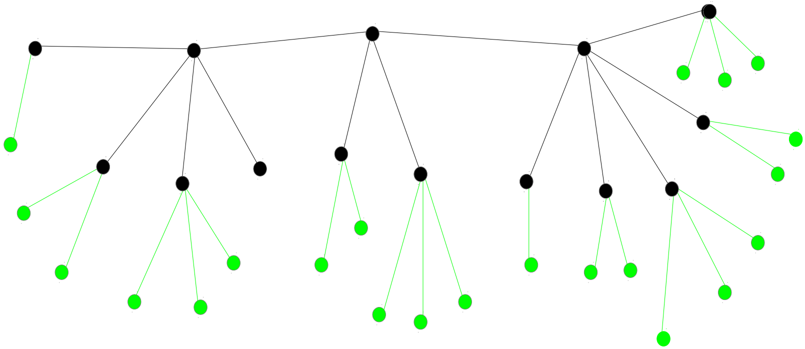
- tous les chemins
- toutes les étoiles
- toutes les chenilles
- et par ordinateur... jusqu'à 35 sommets.

Les homards

Les homards

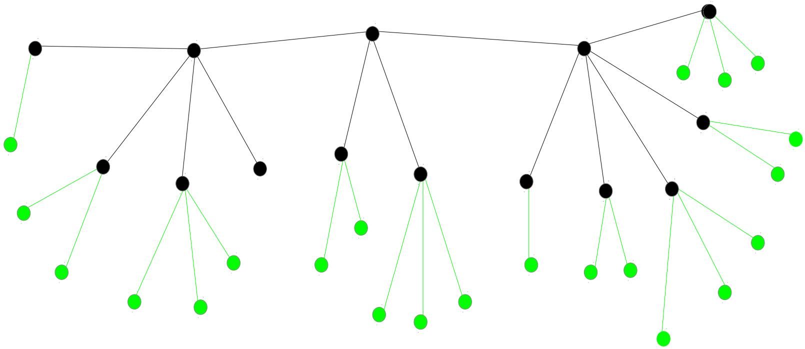


Les homards



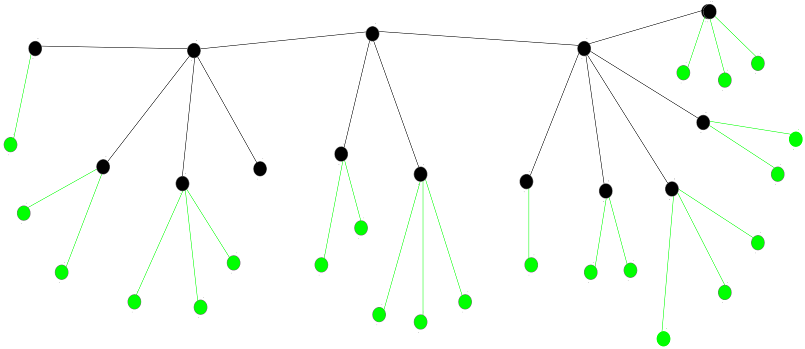
Tous les homards sont-ils gracieux ?

Les homards



Tous les homards sont-ils gracieux ? En 2015, après un demi-siècle de recherches, on l'ignore encore !

Les homards



Tous les homards sont-ils gracieux ? En 2015, après un demi-siècle de recherches, on l'ignore encore !

Défis

Défis

Sauriez-vous montrer, vous aussi, que

Défis

Sauriez-vous montrer, vous aussi, que

1. toutes les étoiles sont gracieuses ?

Défis

Sauriez-vous montrer, vous aussi, que

1. toutes les étoiles sont gracieuses ?
2. tous les chemins sont gracieux ?

Défis

Sauriez-vous montrer, vous aussi, que

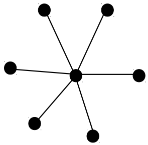
1. toutes les étoiles sont gracieuses ?
2. tous les chemins sont gracieux ?
3. toutes les chenilles sont gracieuses ?

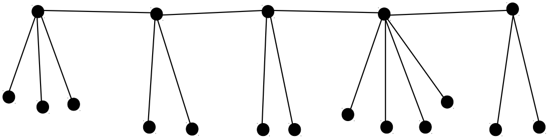
Défis

Sauriez-vous montrer, vous aussi, que

1. toutes les étoiles sont gracieuses ?
2. tous les chemins sont gracieux ?
3. toutes les chenilles sont gracieuses ?

Etoile





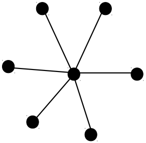
Chenille

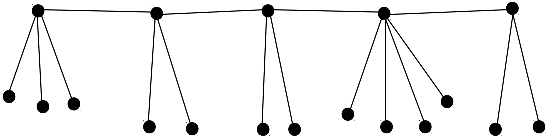
Défis

Sauriez-vous montrer, vous aussi, que

1. toutes les étoiles sont gracieuses ?
2. tous les chemins sont gracieux ?
3. toutes les chenilles sont gracieuses ?

Etoile





Chenille

Petit rappel des thèmes visités

Petit rappel des thèmes visités

- Les nombres parfaits :

Petit rappel des thèmes visités

- Les nombres parfaits :
  - En existe-t-il un qui soit impair ?

Petit rappel des thèmes visités

- Les nombres parfaits :
  - En existe-t-il un qui soit impair ?
  - En existe-t-il une infinité ?

Petit rappel des thèmes visités

- Les nombres parfaits :
  - En existe-t-il un qui soit impair ?
  - En existe-t-il une infinité ?
- La conjecture $3n+1$:

Petit rappel des thèmes visités

- Les nombres parfaits :
  - En existe-t-il un qui soit impair ?
  - En existe-t-il une infinité ?
- La conjecture $3n+1$: toute trajectoire atteint-elle forcément 1 ?

Petit rappel des thèmes visités

- Les nombres parfaits :
  - En existe-t-il un qui soit impair ?
  - En existe-t-il une infinité ?
- La conjecture $3n+1$: toute trajectoire atteint-elle forcément 1 ?
- Les homards sont-ils gracieux ?

Petit rappel des thèmes visités

- Les nombres parfaits :
  - En existe-t-il un qui soit impair ?
  - En existe-t-il une infinité ?
- La conjecture $3n+1$: toute trajectoire atteint-elle forcément 1 ?
- Les homards sont-ils gracieux ?

Merci pour votre attention :-)