Quelques problèmes élémentaires mais inextricables

Shalom Eliahou

Université du Littoral Côte d'Opale

Congrès MATh.en.Jeans

Valenciennes, 11 avril 2015

Introduction

But aujourd'hui

Présenter quelques questions mathématiques, faciles à comprendre, mais non-résolues et posant de **gros défis** aux chercheurs !

Au menu :

- Les nombres parfaits
- Le problème $3n+1$ de Syracuse
- Les homards sont-ils gracieux ?

Quelques mots sur les maths

• Les mathématiques sont une science très ancienne et très moderne.

• But ultime des maths : comprendre le comportement des objets mathématiques.

• Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? A la base, ce sont les nombres entiers (1, 2, 3, etc.) et les figures géométriques simples (carrés, triangles, cercles).

• Mais ensuite, pour mieux comprendre ces premiers objets, il faut en introduire de nouveaux (nombres premiers, rationnels, réels, etc.).

• Puis, pour mieux comprendre ces objets de 2ème génération, il faut en introduire d'autres encore (fonctions, espaces vectoriels, probabilités, etc.). *Ce processus se poursuit depuis des millénaires !*

Une science vivante

• Les mathématiques sont vivantes, pleines de problèmes ouverts qui ne demandent qu'à être résolus.

• Pourquoi tous ces problèmes ?

- pour satisfaire notre curiosité,
- pour comprendre le comportement des objets mathématiques,
- pour défier notre capacité collective à apporter des réponses.

• Certains s'énoncent très facilement... mais semblent insolubles !

• Aujourd'hui, présentation de quelques exemples frappants : en arithmétique et en théorie des graphes.

Nombres premiers : petit rappel

• Un nombre premier est un nombre entier positif, plus grand que 1, qui ne possède aucun diviseur strict à part 1.

• Les **trois plus petits** nombres premiers sont 2, 3 et 5.

• 4 et 6 ne sont pas premiers, puisque divisibles par 2.

• Les **sept** nombres premiers suivant 2, 3, 5 sont 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Theorem (Euclide)

Il y a une infinité de nombres premiers. De plus, tout nombre entier plus grand que 1 est un produit de nombres premiers.

• **Exemples :** $28 = 2 \times 2 \times 7, \quad 30 = 2 \times 3 \times 5.$

Addition et multiplication

• En arithmétique, l'addition toute seule, ou la multiplication toute seule, sont faciles à comprendre.

• Mais quand on les fait intervenir ensemble, ça peut se compliquer très sérieusement !

• Typiquement, comment se comparent les décompositions de n et de $n+1$ comme produits de facteurs premiers ?

• On n'en sait rien en général !

• **Exemples.** $28 = 2 \times 2 \times 7$; 29 est premier ; $30 = 2 \times 3 \times 5$; 31 est premier ; $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$; $33 = 3 \times 11$, etc.

I. Les nombres parfaits

Un nombre parfait est un nombre entier positif n qui est **égal** à la somme de ses diviseurs stricts.

Plus petit exemple : $n = 6$. En effet, ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3.
Sommons-les :

$$1+2+3 \ = \ 6.$$

Y a-t-il d'autres nombres parfaits ?

Oui ! Par exemple, $n = 28$. Ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 7 et 14.
Sommons-les :

$$1+2+4+7+14 \ = \ 28.$$

• Les nombres parfaits ont été inventés par les Grecs Anciens il y a plus de 2000 ans.

• Ils ont découvert les quatre plus petits nombres parfaits : 6, 28, 496, 8128.

Question

Existe-t-il un nombre parfait impair ?

• Cette question reste ouverte depuis 2000 ans !

• On pense que la réponse est **non**, mais on ne sait pas (encore) le démontrer.

Quelques résultats

Theorem (Euclide)

Si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ est un nombre parfait.

Exemples

$$
\begin{aligned}
6 &= 2^1 \times (2^2 - 1) \\
28 &= 2^2 \times (2^3 - 1) \\
496 &= 2^4 \times (2^5 - 1) \\
8218 &= 2^6 \times (2^7 - 1)
\end{aligned}
$$

La réciproque est vraie aussi !

Theorem (Euler, 18ème siècle)

*Réciproquement, si N est un nombre parfait **pair**, alors forcément $N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre premier.*

Definition

Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ s'appellent les premiers de Mersenne.

• Il y a donc une correspondance parfaite entre nombre parfaits pairs et premiers de Mersenne.

• A ce jour, on connaît 48 premiers de Mersenne, et donc 48 nombres parfaits pairs.

Liens avec le monde actuel

• Le **plus grand nombre premier** connu actuellement est un premier de Mersenne, justement.

• Il a été découvert le 25 janvier 2013, par le Great Internet Mersenne Prime Search. Il s'agit de

$$2^{57\,885\,161} - 1,$$

un nombre premier à plus de 17 millions de chiffres !

Question

Existe-t-il une infinité de premiers de Mersenne ?

On n'en sait rien !

II. Le problème $3n+1$ de Syracuse

Considérons la transformation suivante sur les nombres entiers :

- Si n est **pair**, on applique $n \longmapsto n/2$.
- Si n est **impair**, on applique $n \longmapsto 3n+1$.

Exemples

$1 \longmapsto 4, \quad 2 \longmapsto 1, \quad 3 \longmapsto 10, \quad 4 \longmapsto 2, \quad 5 \longmapsto 16, \quad 7 \longmapsto 22, \ \ldots$

Maintenant, partons d'un nombre entier m **quelconque**, et itérons cette fonction : on l'applique à m, puis on la réapplique au résultat, etc.

Exemple : $1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1 \longmapsto \ldots$

Appelons trajectoire de m la suite ainsi obtenue.

Exemples

$1 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto \ldots$

$9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto 7 \longmapsto \ldots$

$15 \mapsto 46 \mapsto 23 \mapsto 70 \mapsto 35 \mapsto 106 \mapsto 53 \mapsto 160 \mapsto 80 \mapsto 40 \mapsto \ldots$

$19 \longmapsto 58 \longmapsto 29 \longmapsto 88 \longmapsto 44 \longmapsto 22 \longmapsto 11 \longmapsto \ldots$

$21 \longmapsto 64 \longmapsto 32 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$

$25 \longmapsto 76 \longmapsto 38 \longmapsto 19 \longmapsto \ldots$

La conjecture de Syracuse

Conjecture (Collatz, 1931)

La trajectoire de tout entier positif m finit toujours par atteindre 1.

- Vrai ou faux ?
- C'est sûrement vrai — mais personne ne sait le démontrer !
- Calculez la trajectoire de 27, elle vaut la peine !
- Cette conjecture est facile à tester sur calculatrice ou ordinateur.

Record actuel, par ordinateur

La conjecture de Syracuse est vraie jusqu'à

$$5\,000\,000\,000\,000\,000\,000,$$

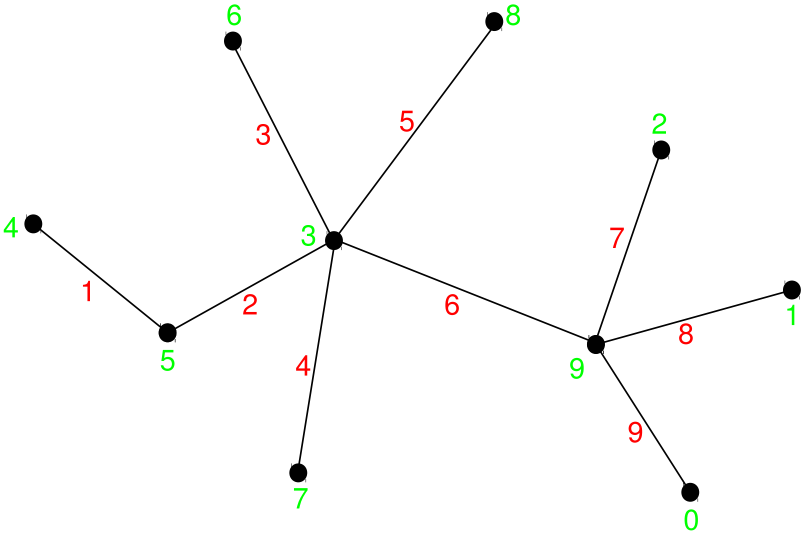
c'est-à-dire jusqu'à 5 milliards de milliards !

Autrement dit, en partant de n'importe quel m inférieur à 5 trillions, sa trajectoire finit bien par atteindre 1.

Résultat obtenu par Tomás Oliveira e Silva. Ses ordinateurs testent un milliard d'entiers par seconde ! Voir

$$www.ieeta.pt/\sim tos/3x+1$$

III. Les homards sont-ils gracieux ?

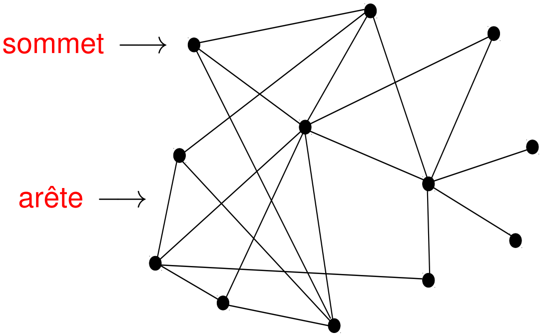


Un peu de vocabulaire

Un graphe G, c'est la donnée :

- de points appelés sommets,
- d'arêtes reliant des paires de sommets.

Exemple.



Réseaux

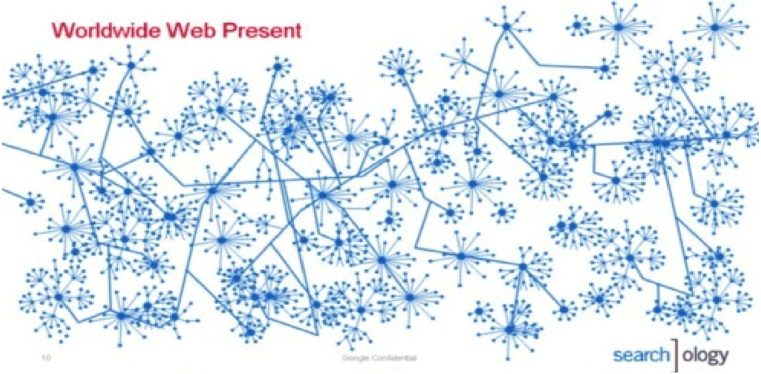
Les graphes permettent de modéliser et analyser toutes sortes de réseaux :

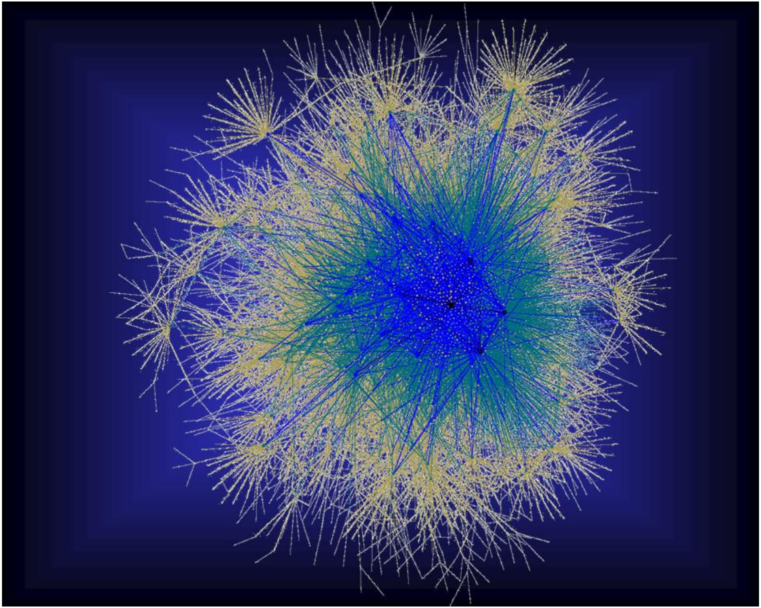
- les réseaux routiers
- les réseaux téléphoniques
- les réseaux sociaux
- les filiations généalogiques
- les circuits électroniques
- etc.

Exemple : le graphe d'Internet

Internet peut être modélisé par un graphe.

- Ses sommets sont les pages du web ;
- Ses arêtes sont les hyperliens.



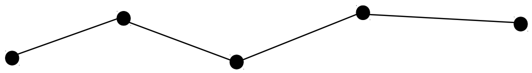


Graphes spéciaux

Il y a toutes sortes de graphes : chemins, cycles, arbres, etc.

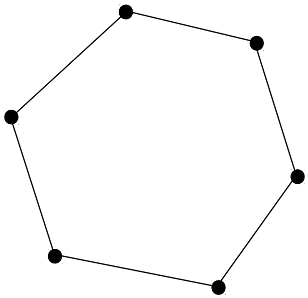
Qu'est-ce qu'un chemin ?

C'est un graphe de cette forme :



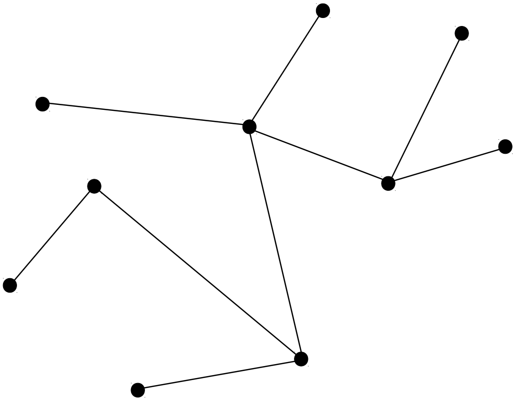
Qu'est-ce qu'un cycle ?

C'est un graphe de cette forme :



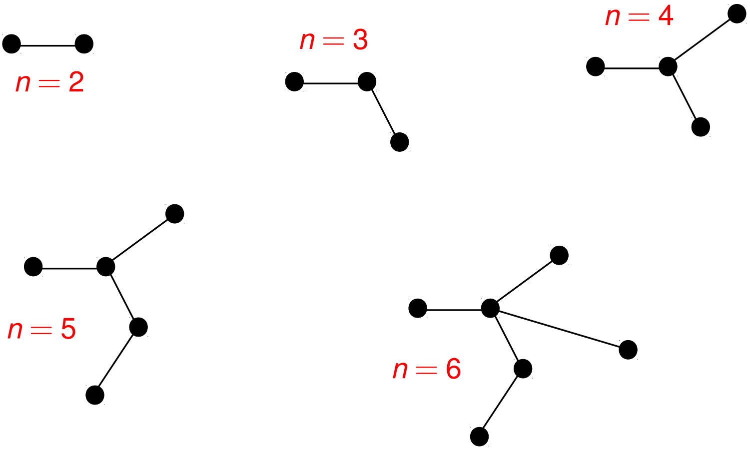
Qu'est-ce qu'un arbre ?

C'est un graphe en un seul morceau, sans cycles.



Un théorème de base

Dans un arbre à n sommets, il y a toujours exactement $n-1$ arêtes.



Numérotation induite

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets.

Numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n} - 1$.

On numérotera alors ses arêtes selon la règle suivante :

Règle du jeu

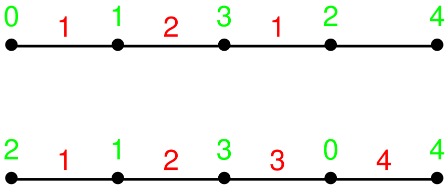
Le numéro assigné à une arête est la **différence positive** des numéros de ses sommets.

C'est la numérotation induite sur les arêtes.

Numérotations gracieuses

Prenons un arbre G à $\boldsymbol{n}$ sommets et, comme avant, numérotons ses sommets de 0 à $\boldsymbol{n}-1$.

> On dit que cette numérotation est gracieuse si la numérotation induite sur les arêtes est sans répétition.



pas gracieuse :-(

gracieuse :-))

La Conjecture des Arbres Gracieux

Un arbre mathématique est dit gracieux si on peut le numéroter gracieusement.

Question. Quels arbres sont-ils gracieux ?

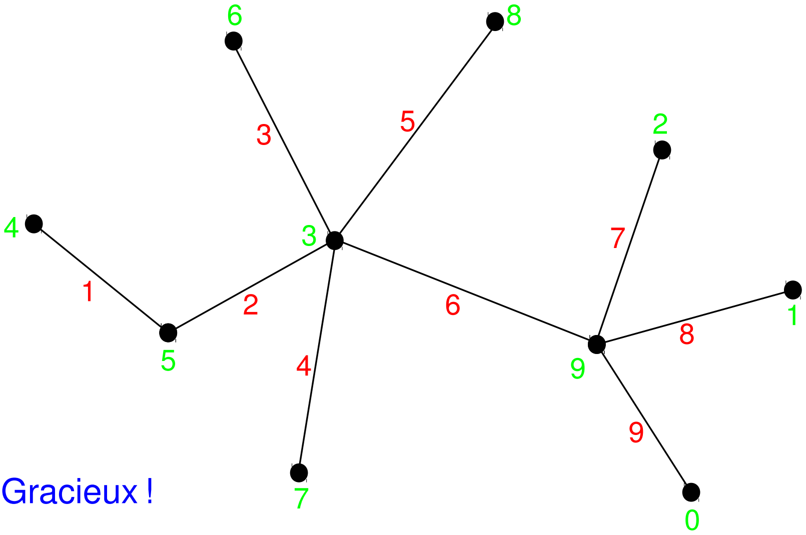
Conjecture (Alex Rosa, 1966)

Tout arbre est gracieux.

Vrai ou faux ?

On pense que c'est **vrai**, mais... personne ne sait le démontrer !

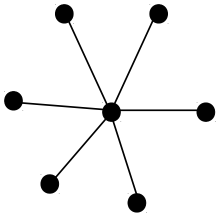
Un exemple : gracieux ou pas ?

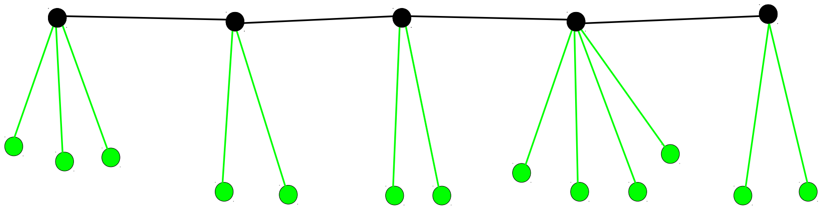


Gracieux !

Quelques arbres spéciaux

Etoile





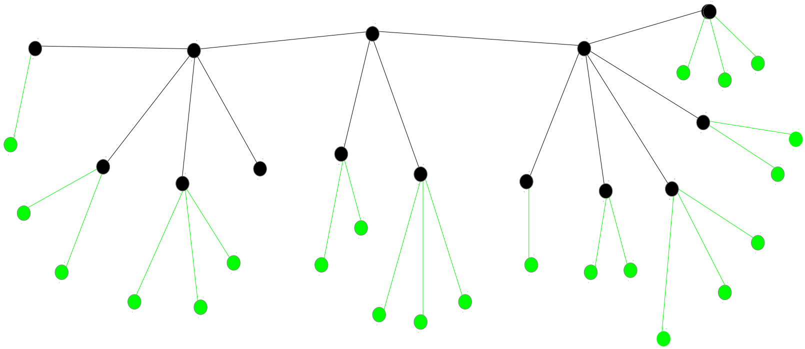
Chenille

Que sait-on en 2015 ?

On sait démontrer que les arbres suivants sont gracieux :

- tous les chemins
- toutes les étoiles
- toutes les chenilles
- et par ordinateur... jusqu'à 35 sommets.

Les homards

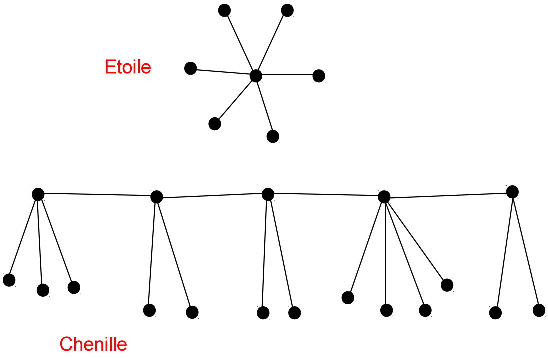


Tous les homards sont-ils gracieux ? En 2015, après un demi-siècle de recherches, on l'ignore encore !

Défis

Sauriez-vous montrer, vous aussi, que

1. toutes les étoiles sont gracieuses ?
2. tous les chemins sont gracieux ?
3. toutes les chenilles sont gracieuses ?



Petit rappel des thèmes visités

- Les nombres parfaits :
  - En existe-t-il un qui soit impair ?
  - En existe-t-il une infinité ?
- La conjecture $3n+1$: toute trajectoire atteint-elle forcément 1 ?
- Les homards sont-ils gracieux ?

Merci pour votre attention :-)