

Quelle est la probabilité de pouvoir former un triangle lorsque l'on coupe un spaghetti en trois ?

Dans cet article, on calcule la probabilité de pouvoir former un triangle lorsque l'on coupe un spaghetti en trois morceaux en démontrant qu'elle dépend fortement de la manière dont la découpe est faite.

Elèves du lycée Beaupré d'Haubourdin:

Courand Alexandre	1 ^{ère} S
Guillemant Marie	1 ^{ère} S
Pigny Morgane	1 ^{ère} S
Pigny Antoine	T ^{le} S
Sengulen Vincent	T ^{le} S

Enseignant : Gaëtan Guillon

Enseignant Chercheur : Augustin Mouze (École Centrale de Lille/ Laboratoire Paul Painlevé UMR 8524 CNRS)

Le problème posé est celui du calcul de la probabilité de pouvoir former un triangle lorsque l'on coupe un spaghetti en trois morceaux. (1)

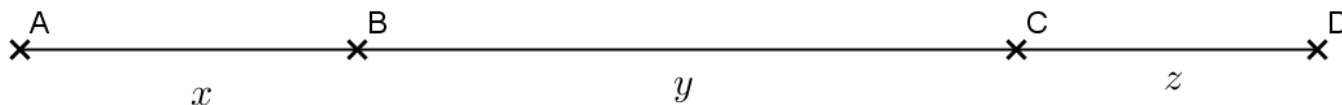
Plutôt que d'énoncer directement les résultats, nous avons pris le parti d'expliquer de manière chronologique les différentes étapes de notre démarche.



auteur : Guillon Gaëtan

Après avoir repris connaissance du problème, nous avons commencé par couper des spaghettis en trois, et suite à ces expérimentations, nous posons :

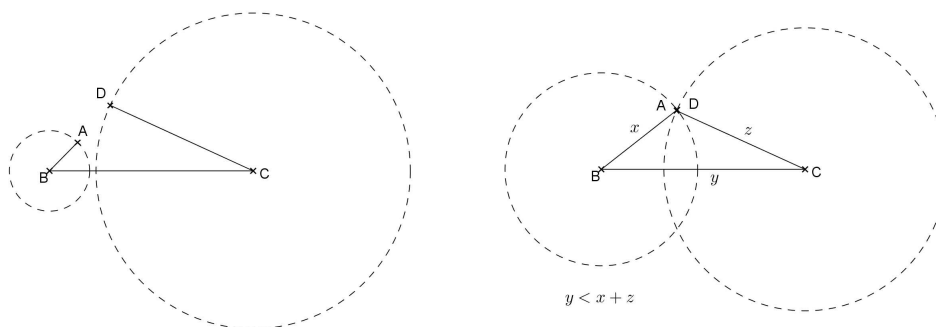
- x la longueur du segment de gauche ;
- y la longueur du segment du milieu ;
- z la longueur du segment de droite.



Nous posons également : $x + y + z = 1$ en considérant que l'unité de longueur est la longueur du spaghetti.

Après plusieurs essais, il nous semble que :

si y est le plus grand des trois côtés, alors le triangle est constructible si et seulement si $y < x + z$



cas $y > x + z$

En effet, dans le cas où $y > x + z$ les cercles de centre B et C ne se coupent pas (et le triangle n'est pas constructible).

Dans le cas où $y < x + z$, il y a intersection des cercles et il est possible de construire un triangle. (2)

De plus, si y est le plus grand des trois côtés, alors $x < y$ et donc $x < y + z$.

De même, on a $z < x + y$.

Ainsi, si y est le plus grand des trois côtés, alors

$$\begin{cases} x < y + z \\ y < x + z \\ z < x + y \end{cases}$$

Par symétrie :

Si un triangle est constructible, alors

$$\begin{cases} x < y + z \\ y < x + z \\ z < x + y \end{cases}$$

Remarque : ce n'est ici qu'une implication et non une équivalence dont nous aurions besoin. Nous décidons d'admettre l'équivalence afin de nous forger une intuition sur le problème et de revenir sur sa démonstration plus tard.

Nous observons également que si un triangle est constructible, alors

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y < \frac{1}{2} \\ z < \frac{1}{2} \end{cases} .$$

En effet, si l'une des longueurs (y par exemple) est supérieure à $\frac{1}{2}$, la somme des deux autres sera inférieure à $\frac{1}{2}$, soit $x + z < \frac{1}{2}$

et donc $x + z < y$, ce qui contredit la condition de constructibilité $\begin{cases} x < y + z \\ y < x + z \\ z < x + y \end{cases}$

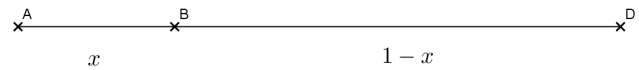
Le chercheur nous propose d'ordonner ainsi les propositions :

$$\text{Triangle constructible} \Leftrightarrow \begin{cases} x < y + z \\ y < x + z \\ z < x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y < \frac{1}{2} \\ z < \frac{1}{2} \end{cases} \text{ en admettant pour l'instant les équivalences.}$$

Première simulation :

Pour obtenir une idée du résultat, nous décidons d'effectuer une simulation sur tableur.

Pour obtenir le premier côté, on coupe en choisissant un nombre x au hasard dans $[0 ; 1]$: « =ALEA() ». Puis, pour obtenir le deuxième, on coupe au hasard dans ce qui reste. Alors $y \llcorner = (1 - x) * \text{ALEA}()$ ». Le dernier côté vaudra $z = 1 - x - y$.



On étudie si les trois longueurs ainsi obtenues sont toutes strictement inférieures à $\frac{1}{2}$.

	A	B	C	D	E	F
1	nb	x	y	z	Si x<1/2, y<1/2, z<1/2	proba
2	1	0,05	0,45	0,5		FAUX
3	2	0,37	0,31	0,31		VRAI
4	3	0,08	0,52	0,4		FAUX
5	4	0,49	0,43	0,08		VRAI
6	5	0,05	0,12	0,83		FAUX
7	6	0,83	0,08	0,09		FAUX
8	7	0,12	0,69	0,19		FAUX
9	8	0,63	0,3	0,06		FAUX
10	9	0,7	0,03	0,27		FAUX
11	10	0,29	0,66	0,05		FAUX
12	11	0,83	0,09	0,08		FAUX
13	12	0,09	0,16	0,75		FAUX
14	13	0,92	0,03	0,05		FAUX
15	14	0,25	0,32	0,43		VRAI
16	15	0,41	0,49	0,1		VRAI
17	16	0,07	0,59	0,34		FAUX
18	17	0,39	0,22	0,39		VRAI
19	18	0,47	0,2	0,33		VRAI
20	19	0,59	0,31	0,11		FAUX
21	20	0,68	0,29	0,03		FAUX
22	21	0,97	0,02	0,02		FAUX
23	22	0,36	0,5	0,12		VRAI
24	23	0,27	0,26	0,47		VRAI
25	24	0,11	0,02	0,87		FAUX
26	25	0,65	0,15	0,19		FAUX
27	26	0,1	0,27	0,63		FAUX
28	27	0,9	0,08	0,02		FAUX
29	28	0,51	0,39	0,1		FAUX
30	29	0,25	0,05	0,69		FAUX

65 535 lancers plus tard, on conjecture que la probabilité cherchée serait d'environ 0,19. (3)

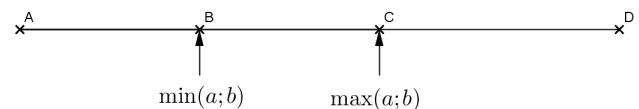
Une découpe sans dépendance ?

Le chercheur nous fait remarquer que la méthode de découpe précédente induit une dépendance entre les points de coupe. En effet, la position du deuxième point de coupe dépend de celle du premier point.

Nous cherchons donc, à partir de deux paramètres, une manière de simuler une découpe sans induire de dépendance.

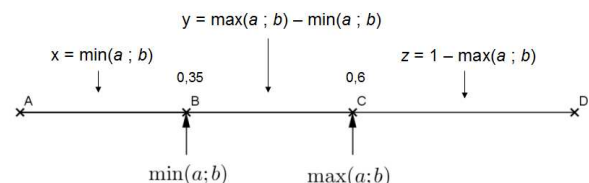
Pour cela, nous décidons de :

- choisir deux nombres a et b au hasard entre 0 et 1 ;
- d'effectuer le premier point de coupe au minimum des deux et d'effectuer le second au maximum des deux.



Les longueurs des côtés seront alors :

$$\begin{aligned} x &= \min(a; b) \\ y &= \max(a; b) - \min(a; b) \\ z &= 1 - \max(a; b) \end{aligned}$$



Nous effectuons une deuxième simulation sur tableur pour étudier

une éventuelle influence de la méthode de découpe et conjecturons cette fois ci une probabilité d'environ 0,25, différente de la première.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	nbr simul	a	b	x	y	z			proba
2	1	0,58	0,01	0,01	0,57	0,42		FAUX	0,25
3	2	0,4	0,72	0,4	0,32	0,28		VRAI	
4	3	0,74	0,85	0,74	0,11	0,15		FAUX	
5	4	0,15	0,87	0,15	0,72	0,13		FAUX	
6	5	0,74	0,5	0,5	0,23	0,26		FAUX	
7	6	0,7	0,07	0,07	0,63	0,3		FAUX	
8	7	0,5	0,29	0,29	0,22	0,5		VRAI	
9	8	0,76	0,2	0,2	0,56	0,24		FAUX	
10	9	0,49	0,47	0,47	0,02	0,51		FAUX	
11	10	0,53	0,47	0,47	0,07	0,47		VRAI	
12	11	0,03	0,64	0,03	0,61	0,36		FAUX	
13	12	0,08	0,28	0,08	0,2	0,72		FAUX	
14	13	0,04	0,11	0,04	0,07	0,89		FAUX	
15	14	0,07	0,75	0,07	0,68	0,25		FAUX	
16	15	0,69	0,44	0,44	0,24	0,31		VRAI	
17	16	0,2	0,23	0,2	0,03	0,77		FAUX	
18	17	0,76	0,7	0,7	0,05	0,24		FAUX	
19	18	0,32	0,01	0,01	0,32	0,68		FAUX	
20	19	0,71	0,8	0,71	0,09	0,2		FAUX	
21	20	0,55	0,61	0,55	0,06	0,39		FAUX	
22	21	0,23	0,68	0,23	0,45	0,32		VRAI	
23	22	0,39	0,84	0,39	0,46	0,16		VRAI	
24	23	0,39	0,68	0,39	0,29	0,32		VRAI	
25	24	0,18	0,98	0,18	0,8	0,02		FAUX	
26	25	0,97	0,72	0,72	0,25	0,03		FAUX	
27	26	0,82	0,25	0,25	0,57	0,18		FAUX	
28	27	0,33	0,82	0,33	0,49	0,18		VRAI	
29	28	0,2	0,08	0,08	0,11	0,8		FAUX	
30	29	0,2	0,44	0,2	0,24	0,56		FAUX	
31	30	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44		VRAI	

Interprétation géométrique et détermination de la probabilité dans le cas « sans dépendance »

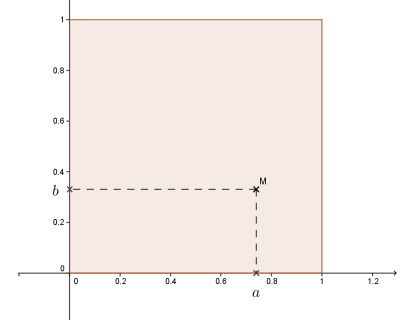
Choisir au hasard deux réels de l'intervalle [0 ; 1] revient, via ses coordonnées, au choix au hasard d'un point dans un carré de côté 1 mis « contre les axes ».

Grâce à cette interprétation géométrique, le problème revient donc à déterminer l'ensemble des points du carré rendant le triangle constructible.

On rappelle la démarche utilisée :

$$M(a; b) \longrightarrow \begin{cases} x = \min(a; b) \\ y = \max(a; b) - \min(a; b) \\ z = 1 - \max(a; b) \end{cases} \text{ et le triangle est constructible si et seulement}$$

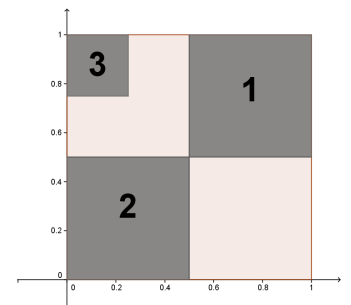
$$\text{si } \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y < \frac{1}{2} \\ z < \frac{1}{2} \end{cases}$$



Premières recherches

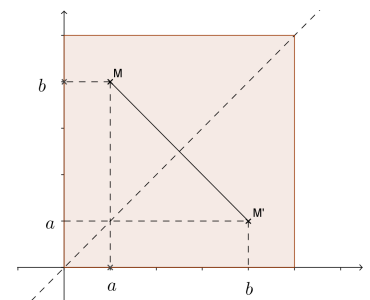
Après plusieurs essais, nous supprimons :

- la zone 1 car a et b y sont strictement supérieurs à 0,5 et alors $x = \max(a; b) > 0,5$ et le triangle n'est pas constructible ;
- la zone 2 car a et b y sont strictement inférieurs à 0,5 et alors $\max(a; b) < 0,5$, donc $z = 1 - \max(a; b) > 0,5$ et le triangle ne sera pas constructible ;
- la zone 3 car on y a $a < 0,25$ et $b > 0,75$. Alors la différence des deux, qui est $y = \max(a; b) - \min(a; b)$ sera strictement supérieure à 0,5 et le triangle ne sera pas non plus constructible.



De plus, a et b jouant des rôles symétriques, si un couple $(a; b)$ convient (ou pas), il en est de même pour le couple $(b; a)$.

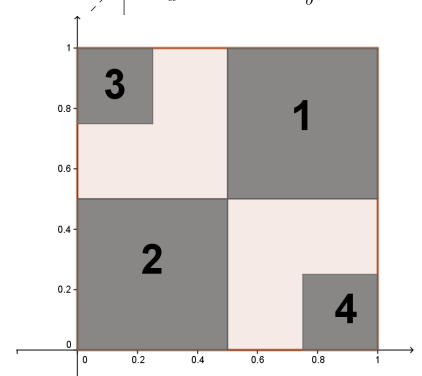
L'ensemble cherché est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

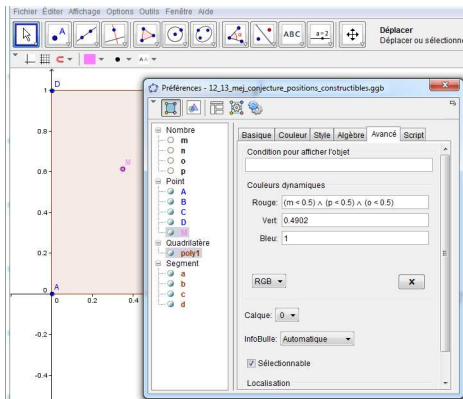


Par symétrie, on supprime donc la zone 4.

Nous continuons de procéder par essais mais il nous est difficile d'enlever des zones complètes.

Nous utilisons alors Géogébra pour nous faire une idée de l'ensemble cherché.

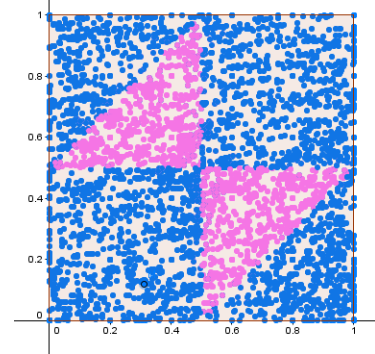




Pour cela, nous faisons changer de couleur le point M en fonction de la constructibilité ou pas du triangle.

La probabilité cherchée est égale au rapport

$\frac{\text{Aire restante}}{\text{Aire totale du carré}}$, soit bien $\frac{1}{4}$ comme conjecturé.



Détermination algébrique de l'ensemble cherché

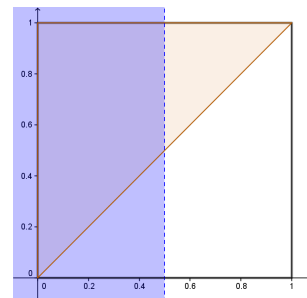
Nous décidons de séparer les cas où $a > b$ et où $a < b$ afin de savoir lequel des deux correspond à $\max(a; b)$ et à $\min(a; b)$.

1^{er} cas : celui où $b > a$ (on travaille dans la zone supérieure gauche du carré)

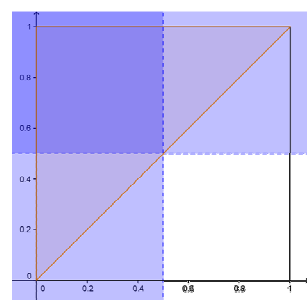
$$\text{Les conditions de constructibilité } \begin{cases} x = \min(a, b) < \frac{1}{2} \\ y = \max(a, b) - \min(a, b) < \frac{1}{2} \\ z = 1 - \max(a, b) < \frac{1}{2} \end{cases} \text{ s'écrivent alors } \begin{cases} a < \frac{1}{2} \\ b - a < \frac{1}{2} \\ 1 - b < \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a < \frac{1}{2} \\ b < a + \frac{1}{2} \\ b > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

On cherche les points dont les coordonnées vérifient les trois inéquations.

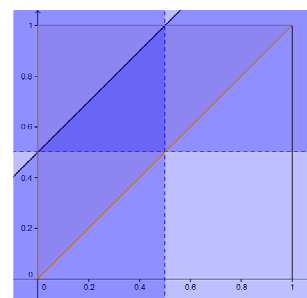
$a < \frac{1}{2}$: on ne conserve que les points du carré dont l'abscisse est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$, soit les points situés à gauche de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.



$b > \frac{1}{2}$: on ne conserve que les points du carré dont l'ordonnée est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$, soit les points situés au dessus de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.



$b < a + \frac{1}{2}$: on introduit la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ et on ne conserve que les points situés sous cette droite.

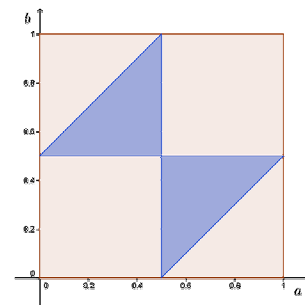


Les points à l'intersection des trois zones sont les points cherchés (pour $b > a$).

2^{ème} cas : celui où $a > b$

On utilise la symétrie observée précédemment et on obtient finalement la zone dessinée ci-contre qui permet d'affirmer que, dans la découpe « sans dépendance », la probabilité cherchée est de $\frac{1}{4}$.

Reste en effet les équivalences du départ à démontrer.



Interprétation géométrique et détermination de la probabilité dans le cas de la découpe naturelle « avec dépendance »

On essaye de procéder par analogie avec la première démarche en repartant de la condition de constructibilité.

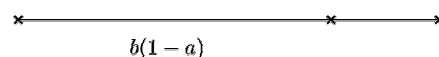
Paramétrage de la découpe

On choisit au hasard un réel a de $[0 ; 1]$ pour paramétrer le premier endroit de coupe.



Ainsi $x = a$ et il reste un bout de spaghetti de longueur $1 - a$ qu'il faut couper au hasard.

On choisit au hasard un réel b de $[0 ; 1]$ (par ex $b = 0,8 = 80\%$) et prendra la longueur y égale à 80 % de $1 - a$, soit $y = b(1 - a)$.



Enfin $z = 1 - a - b(1 - a) = (1 - b)(1 - a)$.

Après avoir choisi aléatoirement deux réels a et b dans $[0 ; 1]$, on a $\begin{cases} x = a \\ y = b(1 - a) \\ z = (1 - b)(1 - a) \end{cases}$ et le triangle est constructible si et

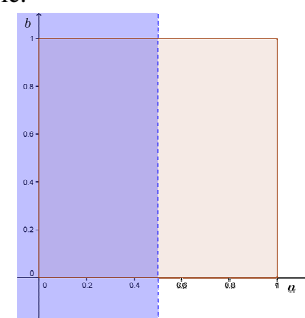
seulement si $\begin{cases} a < \frac{1}{2} \\ b < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - a} \\ (1 - b)(1 - a) < \frac{1}{2} \end{cases}$, soit, après transformation d'écriture $\begin{cases} a < \frac{1}{2} \\ b < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - a} \\ b > 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - a} \end{cases}$.

Interprétation géométrique

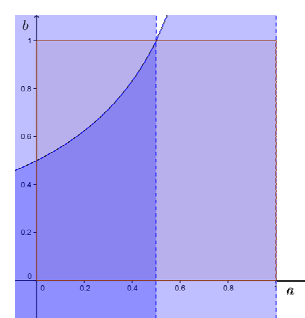
Nous reprenons l'interprétation géométrique du problème effectuée précédemment et nous cherchons la zone constituée du carré de côté 1 constituée de l'ensemble des couples $(a ; b)$ qui correspondent à un triangle constructible.

$a < \frac{1}{2}$: on ne conserve que les points du carré dont l'abscisse est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$,

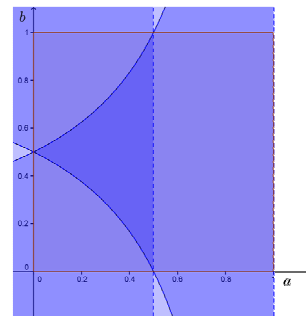
soit les points situés à gauche de la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.



$b < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - a}$: on ne conserve que les points du carré situés en dessous de la courbe de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x}$.



$b > 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-a}$: on ne conserve que les points du carré situés au dessus de la courbe de la fonction définie par $g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}$.



La probabilité cherchée est donc le rapport $\frac{\text{Aire restante}}{\text{Aire totale du carré}}$, soit l'aire du domaine Γ du plan défini par les courbes (C_f) , (C_g) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Sur $[0; \frac{1}{2}]$, (C_f) est au dessus de (C_g) ($f(x) \geq g(x)$), donc

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\Gamma) &= \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x)) dx && (4) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \right) \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) dx \\ &= \left[-\ln(1-x) - x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \ln(2) \approx 0,19 \end{aligned}$$

La probabilité de pouvoir former un triangle dans le cas de la découpe « naturelle » est donc de $\ln(2) - \frac{1}{2}$

Démonstration des équivalences laissées en attente

$$\text{Première équivalence : } \begin{cases} x < y + z \\ y < x + z \\ z < x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y < \frac{1}{2} \\ z < \frac{1}{2} \end{cases}$$

On procède par double implication (5)

Pour l'implication gauche/droite, deux méthodes sont trouvées (6)

<p>Méthode 1 :</p> $x + y + z = 1 \Rightarrow y + z = 1 - x$ <p>Or : $x < y + z$ $\Rightarrow x < 1 - x$ $\Rightarrow 2x < 1$ $\Rightarrow x < \frac{1}{2}$.</p>	<p>Méthode 2 :</p> $x < y + z$ $\Rightarrow 2x < x + y + z$ $\Rightarrow 2x < 1 \text{ car } x + y + z = 1$ $\Rightarrow x < \frac{1}{2}$.
---	---

Pour l'implication droite/gauche, plusieurs méthodes sont aussi trouvées : (7)

<p>Méthode 1 :</p> $x + y + z = 1 \Rightarrow y + z = 1 - x$ <p>Or $x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - x > \frac{1}{2}$ Donc $y + z > \frac{1}{2} > x$ Donc $x < y + z$.</p>	<p>Méthode 2 :</p> $y < \frac{1}{2} \text{ or } x + y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - x - z$ <p>Donc $1 - x - z < \frac{1}{2}$ Donc $x + z > \frac{1}{2} > y$</p>	<p>Méthode 3 :</p> <p>On remarque que les implications dans les méthodes de démonstration de l'implication gauche/droite sont des équivalences.</p>
---	---	---

Deuxième équivalence :

Etant donnés trois réels strictement positifs x , y et z ,

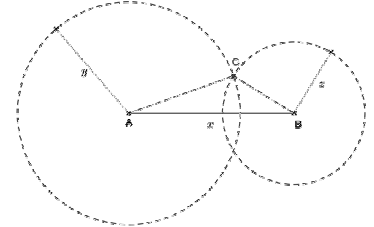
il est possible de construire un triangle dont les longueurs des côtés sont x , y et z si et seulement si
$$\begin{cases} x < y + z \\ y < x + z \\ z < x + y \end{cases}$$

Pour l'implication gauche/droite, on utilise l'inégalité triangulaire.

Pour l'implication droite/gauche, en supposant que x soit le plus grand des trois réels, construisons un segment $[AB]$ de longueur x puis des cercles de centre A et B et de rayons respectifs y et z .

$x < y + z$ donc les cercles sont sécants et le triangle est constructible.

On reprend ce raisonnement dans le cas où y ou z sont les plus grands des trois.



Conclusion :

La probabilité de pouvoir former un triangle dépend de la manière de découper le spaghetti.

Avec la manière que nous avons appelée « naturelle » et qui induit une dépendance entre les points de coupe, la probabilité est de $\ln(2) - \frac{1}{2} = 0,19$.

Avec la manière « sans dépendance », elle est de $\frac{1}{4}$.

(8)

Notes de l'édition

- (1) On considère que l'on découpe un spaghetti en trois morceaux, de manière aléatoire. Le protocole expérimental de découpage n'étant pas explicité, on peut imaginer différentes manières de procéder en faisant intervenir le hasard. C'est ainsi que les élèves vont étudier par la suite deux protocoles différents.
- (2) Il manque le cas où $x = y+z$. Le triangle obtenu est alors un triangle aplati, cas que les élèves excluent pour la suite.
- (3) Les élèves calculent à l'aide de leur simulation une fréquence, la fréquence de triangles constructibles sur 66535 découpages. Par la loi des grands nombres, elle est proche de la probabilité cherchée.
- (4) Ce passage nécessite de connaître le calcul intégral, ainsi que la fonction logarithme népérien, vus en classe de terminale.
- (5) Cette équivalence n'est exacte que sous l'hypothèse faite en début d'étude (et non rappelée ici), que la longueur du spaghetti est égale à 1, soit $x+y+z=1$.
- (6) Comme x , y et z jouent un rôle symétrique, on en déduit de même les autres inégalités $y < 1/2$ et $z < 1/2$.
- (7) Comme x , y et z jouent un rôle symétrique, on en déduit de même les autres inégalités.
- (8) On rappelle que la découpe du spaghetti se fait aléatoirement.