

Echiquiers égalitaires de Hadamard

Année 2014 - 2015

Elèves de 4^e : Gauthier DEBUISSCHERT, Timon DUBOIS, Paul BORGARD, Léopold LESAING, Tanguy PERRON.

Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

Enseignants : Florence FERRY, Claudie ASSELAIN et Nicolas SEGARRA.

Chercheur : Céline ABRAHAM, université Paris-Sud Orsay.

Le sujet [1]

On prend un échiquier avec des cases de deux couleurs différentes réparties au hasard ; ces échiquiers ne sont pas très pratiques pour jouer aux échecs ! Un échiquier est dit égalitaire lorsque : si on choisit deux lignes (ou deux colonnes) quelconques, le nombre de colonnes (lignes) dont les deux cases sont de la même couleur est égal au nombre de colonnes (lignes) dont les deux cases sont de couleurs différentes.

Peut-on trouver des échiquiers égalitaires ? Combien de cases auront-ils ?

On supposera dans la suite que les échiquiers sont carrés.

Nos résultats

Nous avons donné une conjecture pour le nombre n de cases sur un côté et nous avons établi une méthode pour construire des échiquiers égalitaires quand " n " est une puissance de 2.

I – Exemples – Explication du sujet

Voici un premier échiquier qui est égalitaire.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2		■		■		■		■
3			■		■		■	
4		■				■		
5					■		■	
6		■		■			■	
7			■		■			■
8		■			■			■

Isolons deux lignes quelconques :



En regardant les colonnes de ces deux lignes :

- 4 colonnes ont des cases de même couleur (les colonnes 1, 4, 6 et 7).
- 4 colonnes (les autres) ont des cases de couleurs différentes.

En regardant les lignes de ces deux colonnes :

- 4 lignes ont des cases de même couleur (les lignes 1, 4, 5 et 8).
- 4 lignes (les autres) ont des cases de couleurs différentes.

Les conditions du sujet sont vérifiées pour deux lignes ou deux colonnes quelconques, cet échiquier

est donc égalitaire.

Voici un deuxième exemple :

	1	2	3	4	5	6
1						
2		■		■		■
3	■		■			
4		■				■
5	■				■	
6		■		■		

Cet échiquier n'est donc pas égalitaire.

En regardant les deux premières lignes :

- 3 colonnes ont des cases de même couleur (les colonnes 1, 3 et 5).
- 3 colonnes (les autres) ont des cases de couleurs différentes.

En regardant les lignes 4 et 6 :

- 2 colonnes ont des cases de même couleur (les colonnes 1, 4, 6 et 7).
- 4 colonnes (les autres) ont des cases de couleurs différentes.

Pour la suite de l'article, nous dirons que deux lignes sont inverses l'une de l'autre lorsque les couleurs de l'une seront l'inverse des couleurs de l'autre.

II – Conditions pour avoir un échiquier égalitaire

Sur deux lignes quelconques d'un échiquier égalitaire, on a autant de colonnes contenant deux cases de la même couleur (on note ce nombre A) que de colonnes ayant des cases de couleurs différentes (on note ce nombre B). On a : $A = B$. Le nombre total de cases sur une ligne est $A + B = 2A$, c'est un nombre pair. Le même raisonnement s'applique sur les colonnes.

Pour qu'un échiquier puisse être égalitaire, il faut donc un nombre pair de cases sur les côtés.

III – Recherche d'échiquiers égalitaires

A) Remarques préalables

Nous pouvons faire tout d'abord quelques remarques utiles pour la suite :

- Si un échiquier est égalitaire alors son inverse (c'est à dire obtenu en échangeant blanc et noir) est également égalitaire.
- Si un échiquier est égalitaire, on peut échanger des lignes (ou des colonnes), il restera égalitaire.
- Un échiquier égalitaire ne pourra pas avoir deux lignes (ou deux colonnes) inverses ni deux lignes identiques.
- Si un échiquier égalitaire possède une ligne (ou colonne) de cases identiques, les autres lignes (colonnes) auront autant de cases noires que de cases blanches.

B) Recherches systématiques à la main

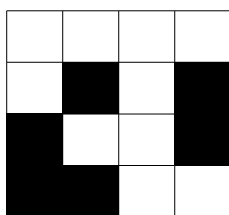
1) Les échiquiers " 2×2 "

On trouve un seul échiquier égalitaire :

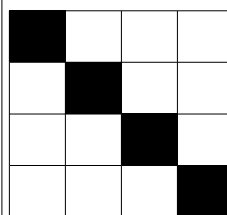
	■

On obtient tous les autres en prenant l'inverse ou en échangeant les colonnes et les lignes.

2) Les échiquiers " 4×4 "



Il y a une ligne de cases blanches donc toutes les autres possèdent 2 cases noires, on a donc une seule possibilité pour placer ces cases (aux permutations de colonnes ou de lignes près et tous les inverses).



S'il n'y a pas de ligne entièrement blanche, il doit y avoir une case noire.

Nous pensons avoir ainsi obtenu tous les échiquiers égalitaires de côté 4 (à permutations ou inversions près). [2]

3) Les échiquiers " 6×6 " et " 10×10 "

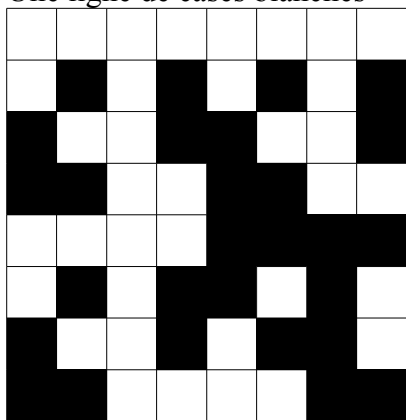
Nous avons longtemps cherché de tels échiquiers égalitaires mais nous n'avons pas réussi à en trouver. De plus, lorsque le nombre de cases augmente, la recherche à la main se révèle être très difficile.

4) Les échiquiers " 8×8 " et " 12×12 "

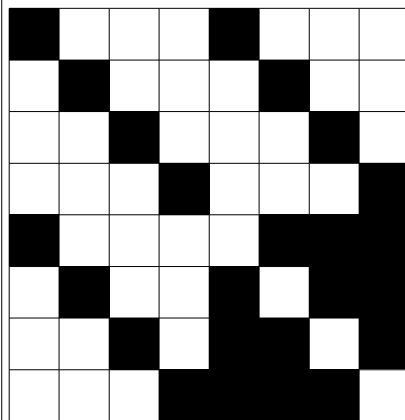
Nous avons par contre réussi à trouver des échiquiers égalitaires " 8×8 " dont on a un exemple dans le I.

Cas à étudier :

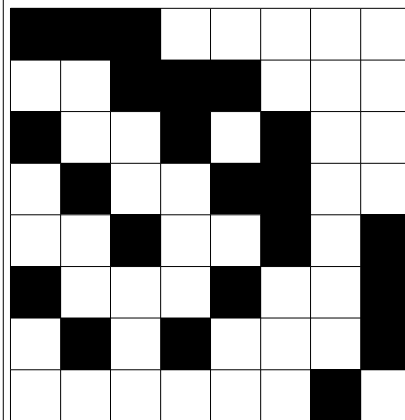
Une ligne de cases blanches



Il y a une ligne de case blanches donc toutes les autres possèdent obligatoirement 4 cases noires exactement.



Dans ce cas, il n'y a pas de ligne d'une seule couleur. On remarque que le nombre de cases noires est pair sur chaque ligne (ou colonne).

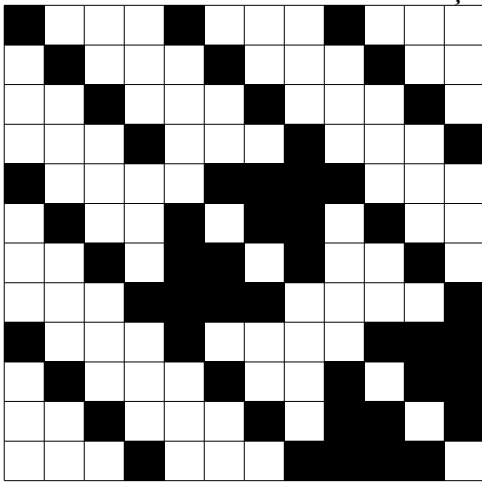


Voici un cas avec un nombre impair de cases noires sur chaque ligne.

Nous n'avons pas trouvé d'autres échiquiers égalitaires de Hadamard qui soient entièrement différents (sans faire de permutation ou inverser).

Voici également un échiquier 12×12 que nous avons construit avec des échiquiers égalitaires

4×4 tous formés de la même façon mais avec des inversions :



C) Les échiquiers dont les côtés sont une puissance de 2 : une méthode !

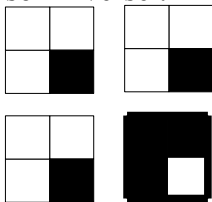
Nous avons trouvé une façon de construire des échiquiers " $2^k \times 2^k$ " égalitaires ; voici la méthode.

[3]

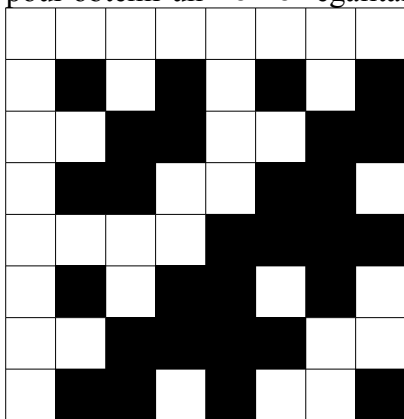
On part d'un échiquier égalitaire 2×2 :



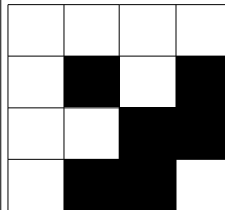
Pour construire l'échiquier égalitaire 4×4 , on rajoute deux fois ce carré et une fois son inverse :



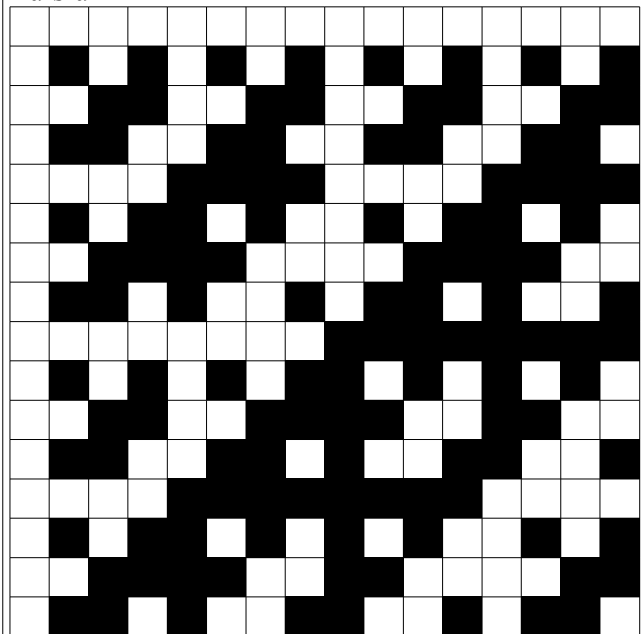
On va ensuite répéter cette construction pour obtenir un 8×8 égalitaire :



On obtient alors un nouvel échiquier égalitaire :

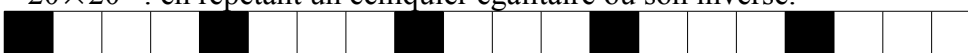


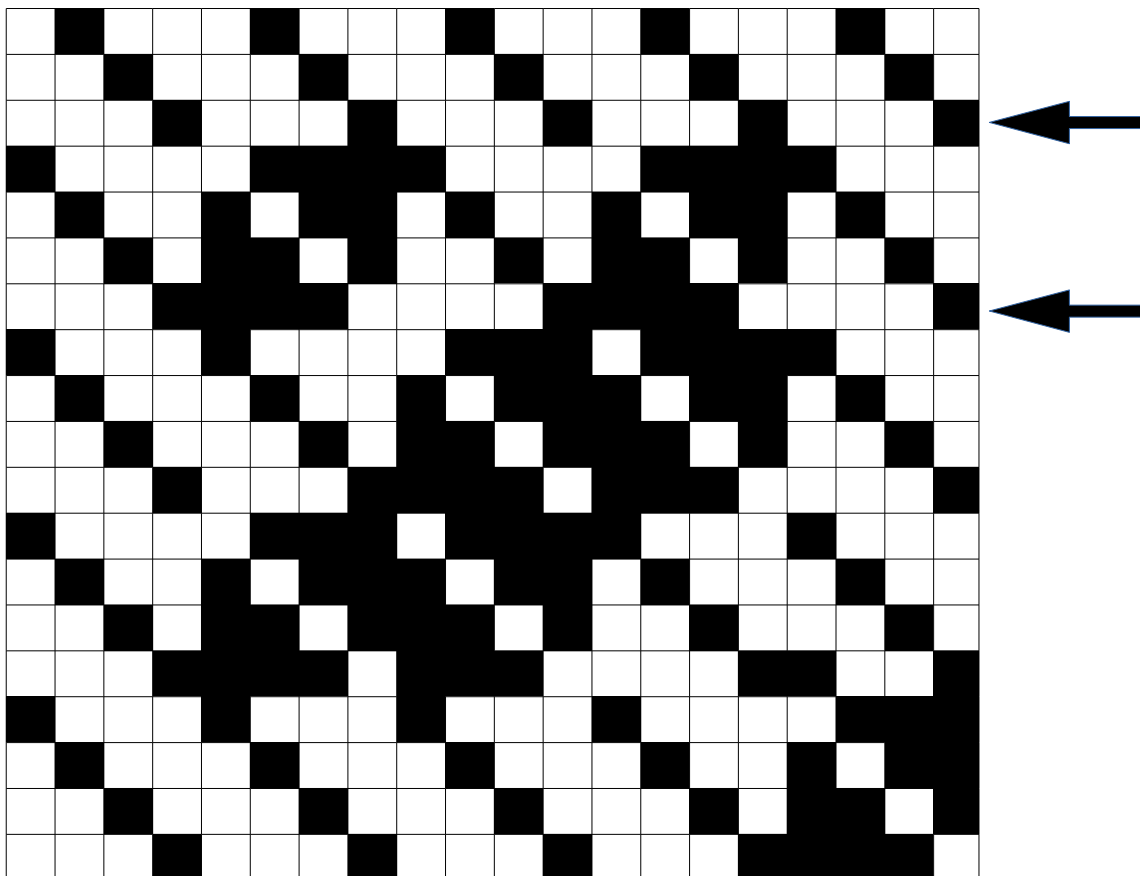
Puis un 16×16



D) Tentative de construction pour l'échiquier 20×20

En analysant l'échiquier 12×12 on a essayé de construire sur le même modèle un échiquier 20×20 : en répétant un échiquier égalitaire ou son inverse.





Nous avons longtemps pensé qu'il était égalitaire mais il se trouve que deux lignes (indiquées par les flèches, ligne 4 et ligne 8) ne conviennent pas. Cet échiquier n'est donc pas égalitaire. Nous avons quand même trouvé sur internet des échiquiers 20×20 et 24×24 égalitaires.

IV – Conjecture finale

En regardant tous les échiquiers qu'on a pu construire (et ceux trouvés sur internet de taille 20×20 et 24×24), on pense que les échiquiers pouvant être être égalitaires sont tous ceux dont le nombre de cases sur leurs côtés est un multiple de 4. Nous n'avons pas trouvé de méthode pour les construire excepté pour ceux dont le nombre de cases sur leurs côtés est une puissance de 2.

V – Tentative d'extension

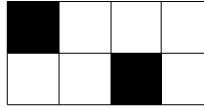
Nous avons pensé à étendre le sujet : un échiquier rectangulaire peut-il être égalitaire.

Conjecture : nous pensons également que l'échiquier doit être carré. [4]

Nous n'avons pas réussi à le démontrer mais nous avons essayé de l'expliquer pour un échiquier rectangulaire possédant 2 cases sur un côté.

Lorsqu'on prend un échiquier 2×2 égalitaire, si on veut l'agrandir on peut rajouter une colonne mais dans ce cas, un côté (celui de 3 cases) est impair : l'échiquier ne peut donc pas être égalitaire. Si on rajoute encore une colonne (on obtient donc un échiquier 2×4 rectangulaire), on remarque que l'on est obligé de réutiliser une colonne avec des cases de même couleur ou d'utiliser une colonne avec deux couleurs inverses. L'échiquier ne pourra pas être égalitaire.

Par exemple :



Si on prend les colonnes 2 et 4, elles ne conviennent pas puisqu'elles sont identiques.
On retrouve le même problème avec les 2×6 , les 2×8 , etc...
Cette difficulté se retrouve pour le 4×6 ou le 4×8 .

Notes d'éditions

[1] Ce problème a été posé, sous une forme un peu plus algébrique, par le mathématicien français Jacques Hadamard (1865-1963).

[2] Pour donner un sens à cette assertion, il aurait été nécessaire de préciser ce que l'on entend par "à permutation et inversions près) et de rendre un peu plus systématique la démarche utilisée pour rechercher les échiquiers égalitaires. Ainsi, l'échiquier

N B B B

N N N B

N N B N

N B N N

est aussi égalitaire. Il se déduit de ceux déjà trouvés dans l'article par échange des lignes et des colonnes, permutations, et inversion.

[3] Cette méthode repose sur le fait (que l'on aurait pu démontrer) que, si l'on dispose d'un échiquier égalitaire de taille n , en recollant ensemble 3 exemplaires de cet échiquier et un exemplaire de l'échiquier inverse, on obtient alors un échiquier égalitaire de taille $2n$.

[4] Judicieuse conjecture, qui peut être démontrée par des arguments qui dépassent le cadre de cet article.