Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

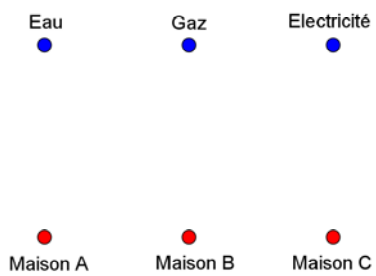
Graphes et croisements

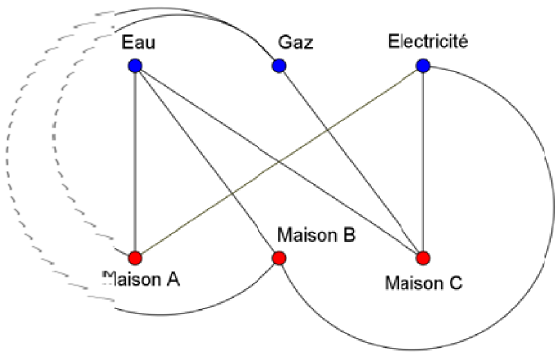
Année 2016-2017

Auteur·e·s : DELIMAUGES Alexandre, DEVILLERS Inès, NOËL Loréna, élèves de 1ère S.
Établissement : Lycée Condorcet, Saint-Quentin (02).
Encadré·e·s par : Fabien AOUSTIN.
Chercheur : Fabien DURAND, Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée, LAMFA, UMR CNRS 7352, Université de Picardie Jules Verne.

1) Présentations du problème de départ

Le problème consiste à raccorder trois maisons à l'eau, au gaz et à l'électricité.

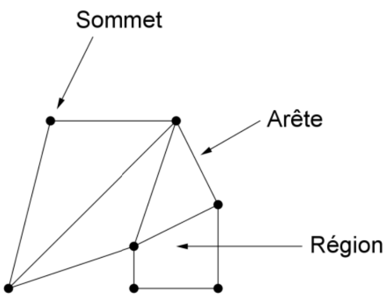




Est-ce possible sans croisement ?

1-a) Qu'est ce qu'un graphe ?

◎ Un graphe est composé de sommets, reliés entre eux par des arêtes.
◎ Un sommet (noté S) : c'est un point.
◎ Une arête (notée A) : c'est ce qui relie deux sommets.
◎ Une région (notée R) : c'est une zone délimitée par des arêtes. (1)
◎ On ne considère que les graphes en un seul morceau (pas de points isolés par exemple). (2)

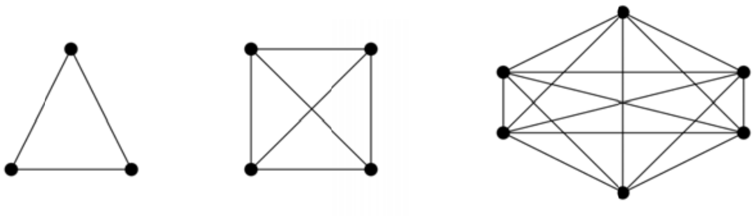


1-b) Objectifs de nos recherches

◎ Un graphe étant donné, peut-on déterminer le nombre minimum de croisements entre ses arêtes ?
◎ On s'intéressera plus particulièrement aux graphes complets d'ordre n, c'est-à-dire aux graphes dont chaque sommet est relié à tous les autres. On les note K_n.

1-c) Exemples de graphes complets

Voici K_3, K_4 et K_6.



2) Différentes formules sur les graphes

2-a) Nombre d'arêtes dans un graphe complet

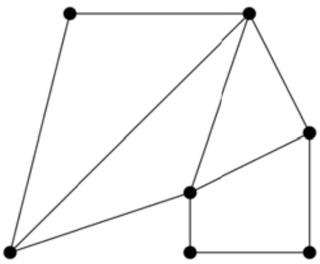
Dans un graphe complet K_n avec n le nombre de sommets, le nombre d'arêtes est donné par :

$$\frac{n \times (n-1)}{2}.$$

En effet, chaque sommet est relié à tous les autres (il y en a $n - 1$).
Quand on a effectué le produit $n(n - 1)$ on obtient le double du nombre d'arêtes car chaque arête est reliée à 2 sommets. On divise donc ce produit par 2 pour obtenir le nombre d'arêtes.

2-b) Différentes formules sur les graphes

En notant S le nombre de sommets, R le nombre de régions et A le nombre d'arêtes d'un graphe, on a : S + R – 1 = A. (3)

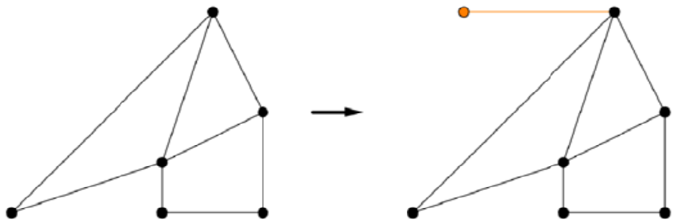


Par exemple, ici, on a : S = 7, R = 4 et A = 10.
On a bien : 7 + 4 – 1 = 10.

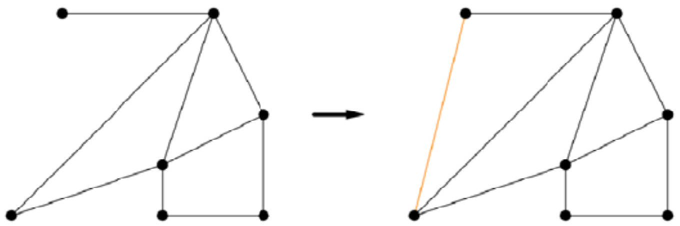
Démontrons cette conjecture.

◎ Pour dessiner un graphe, on part d'un sommet.
◎ On a alors S = 1, A = 0 et R = 0.
◎ La formule S + R – 1 = A est vraie à cette étape.

◎ Pour continuer à dessiner un graphe, on peut ajouter un sommet et une arête.
◎ La formule S + R – 1 = A reste vraie.



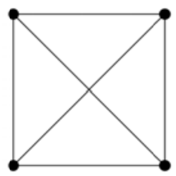
◎ On peut aussi ajouter une arête entre deux sommets déjà présents mais cela créera une région supplémentaire.
◎ La formule S + R – 1 = A reste vraie.



3) Une première conjecture… et quelques précisions

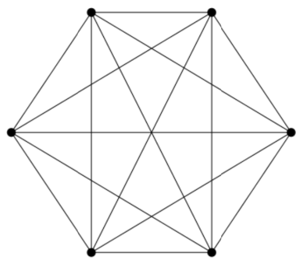
3-a) Une conjecture fausse

On note C le nombre de croisements dans un graphe.
Nous avons alors conjecturé que : S + R – C – 1 = A



Ici : S = 4, R = 4, C = 1 et A = 6.
On a : 4 + 4 – 1 – 1 = 6.

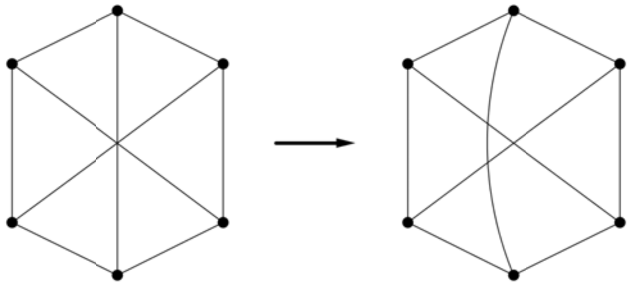
Nous avons, hélas, trouvé un contre-exemple qui nous a obligé à redéfinir différentes notions.



En effet avec ce graphe complet d'ordre 6 on a : S = 6, R = 24, C = 13 et A = 15
Or 6 + 24 – 13 – 1 ≠ 15
La formule ne correspond donc pas.
Cette erreur provient du croisement de 3 arêtes.

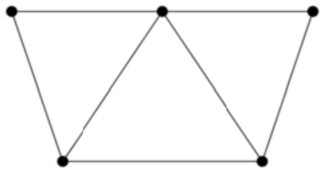
3-b) Précision sur les croisements

Nous avons alors amené des précisions sur les croisements
Pour éviter les configurations comme celle vue avant, on n'autorise que des croisements entre deux arêtes.



3-c) Précision sur les régions

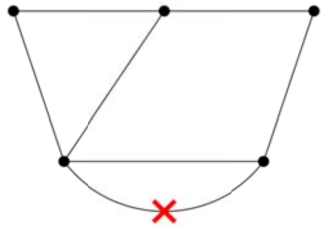
Une arête est comprise entre deux régions... à condition de compter l'extérieur comme une région !



Il y a ici 4 régions.

3-d) Précision sur les arêtes

Si on n'autorise pas que deux sommets soient reliés par deux arêtes alors une région est délimitée par au moins trois arêtes. (4)



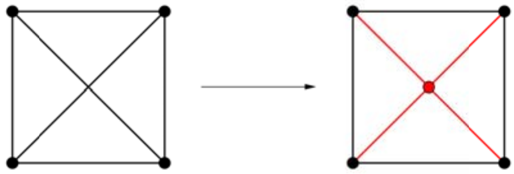
4) Une formule pour les graphes complets

4-a) Démonstration de la formule (5)

Compte-tenu de ces précisions, on peut dire que dans un graphe, on a : $S + R - 2 = A$.
On a donc $S - A + R = 2$.
Une région étant délimitée par au moins trois arêtes, on a : $2A \geq 3R$.
On a donc aussi $\frac{2A}{3} \geq R$.

Dans un graphe complet d'ordre n on a vu que : $\mathrm{A}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

◎ On part d'un graphe complet d'ordre n avec des croisements.
◎ On note C le nombre minimum de croisements.
◎ On obtient un nouveau graphe en considérant ces croisements comme des sommets.
◎ Chaque croisement ajoute deux arêtes :



Dans ce nouveau graphe :

- le nombre de sommets est égal à : n + C
- le nombre d'arêtes est égal : A + 2C

On a donc S – (A + 2C) + R = 2.
En combinant ces formules, nous avons obtenu que, pour un graphe complet à n sommets : (6)

$$\mathrm{S}-(\mathrm{A}+2\mathrm{C})+\frac{2\mathrm{A}}{3}\geq 2 \Leftrightarrow n+\mathrm{C}-\left(\frac{n(n-1)}{2}+2\mathrm{C}\right)+\frac{2\times\left(\frac{n(n-1)}{2}+2\mathrm{C}\right)}{3}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow n+\mathrm{C}-\frac{n(n-1)}{2}-2\mathrm{C}+\frac{2\times\left(\frac{n^2-n}{2}+2\mathrm{C}\right)}{3}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow n-\frac{n^2-n}{2}-\mathrm{C}+\frac{n^2-n+4\mathrm{C}}{3}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{6n}{6}-\frac{3n^2-3n}{6}-\frac{6\mathrm{C}}{6}+\frac{2n^2-2n+8\mathrm{C}}{6}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n^2+7n+2\mathrm{C}}{6}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n^2+7n-12}{6}\geq -\frac{\mathrm{C}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n^2+7n-12}{-2}\leq \mathrm{C}$$

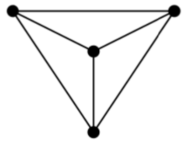
$$\Leftrightarrow \frac{n^2-7n+12}{2}\leq \mathrm{C}$$

On a donc démontré que, dans un graphe complet d'ordre n, le nombre minimum de croisements est au moins égal à $\dfrac{n^2-7n+12}{2}$.

4-b) Application de la formule

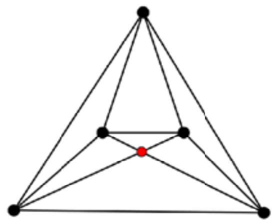
Pour le graphe complet d'ordre 4, notre formule indique que le nombre minimum de croisements est supérieur ou égal à : $\dfrac{4^2-7\times 4+12}{2}=0$.

Il est en fait bien égal à 0 :



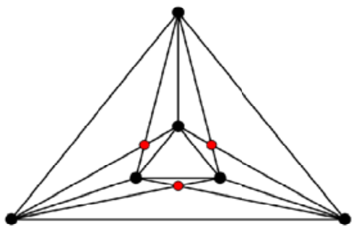
Pour le graphe complet d’ordre 5, notre formule indique que le nombre minimum de croisements est supérieur ou égal à : $\frac{5^2-7\times5+12}{2}=1$.

Il est en fait bien égal à 1 :



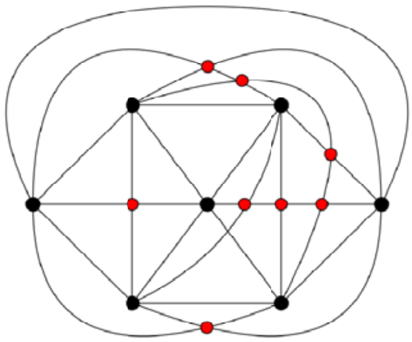
Pour le graphe complet d’ordre 6, notre formule indique que le nombre minimum de croisements est supérieur ou égal à : $\frac{6^2-7\times6+12}{2}=3$.

Il est en fait bien égal à 3 :



Pour le graphe complet d’ordre 7, notre formule indique que le nombre minimum de croisements est supérieur ou égal à : $\frac{7^2-7\times7+12}{2}=6$.

Nous n’avons pas trouvé mieux que 9 croisements... (7)



5) Retour à l’énigme des trois maisons

Nous pouvons maintenant répondre à l’énigme des trois maisons en reprenant le raisonnement précédent. On part du principe que le graphe ne comporte pas de croisement.

On a alors la formule S – A + R = 2.

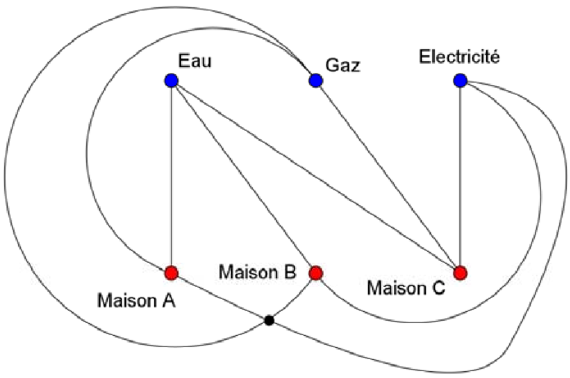
Ici, S = 6, A = 9 et on cherche le nombre de régions. La formule donne :

$$6-9+R=2 \Leftrightarrow R=2-6+9$$
$$\Leftrightarrow R=5.$$

Dans le cas de ce graphe, une région est formée par au moins 4 arêtes car les maisons et les ressources ne sont pas reliées entre elles. Une arête est entre deux régions. On aurait donc :

$$\frac{R\times 4}{2}\leq A \Leftrightarrow \frac{5\times 4}{2}\leq A$$
$$\Leftrightarrow 10\leq A$$

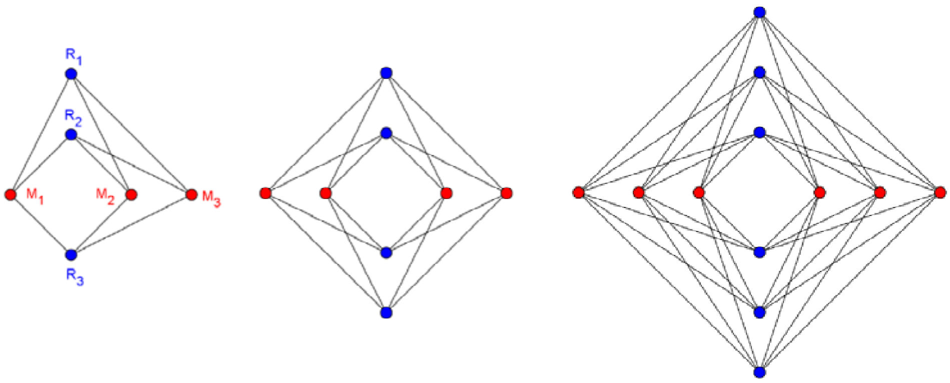
Or A = 9. Il y a donc une erreur liée au fait de supposer qu'il n'y a pas de croisement.
Il y en a donc au moins 1, comme ici :



6) D'autres pistes de recherche :

Nous nous sommes demandé si nous pouvions généraliser le problème des trois maisons : comment relier quatre maisons à quatre ressources avec le moins de croisements possibles ? cinq maisons et cinq ressources ? etc.

Un graphe complet biparti est un graphe comportant deux ensembles de sommets où tous les sommets d'un ensemble sont reliés à ceux de l'autre (Exemple : problème des trois maisons).
Nommons $K_{n,m}$, le graphe complet biparti avec n le nombre de ressources et m le nombre de maisons.
En changeant le nombre de maisons, de ressources et/ou leur disposition, peut-on trouver une configuration optimale qui nous permette de trouver plus rapidement le nombre minimum de croisements ?
Après en avoir essayé plusieurs, nous suggérons ce modèle de configuration :



1 croisement pour $K_{3,3}$, 4 croisements pour $K_{4,4}$ et 36 croisements pour $K_{6,6}$.

Serait-il possible de trouver une formule permettant de calculer le nombre minimum de croisements suivant le nombre de sommets pour les graphes bipartis complets $K_{n,m}$?

Notes d'édition

(1) La région extérieure, souvent appelée région non-bornée, n'est pour l'instant pas considérée comme une région mais le sera plus tard dans l'article (page 4, paragraphe 3-c).
(2) En mathématiques quand un graphe est d'un seul tenant, on dit que le graphe est connexe.
(3) Si on considère la région non-bornée (voir note (1)) la formule devient S+R-2=A et est connue sous le nom de Formule d'Euler. Elle ne peut s'appliquer qu'aux graphes dit planaires, c'est-à-dire sans croisement entre les arrêtes.
(4) Un graphe sans ce genre d'arête « double » est communément appelé un graphe simple. Il est aussi à noter que les auteurs considèrent à partir d'ici des graphes avec au moins 3 arêtes. En effet, si on considère un graphe avec seulement deux arêtes, on a alors la région non-bornée délimitée par seulement 2 arêtes.
(5) Attention, dans cette démonstration, il y a des confusions autour de A. Parfois celui-ci correspond au nombre d'arêtes du graphe complet K_n (qui vaut alors n(n-1)/2) et parfois il correspond au nombre d'arêtes dans le graphe obtenu en voyant les croisements de K_n comme sommets (ce qui rajoute donc 2C arêtes). En particulier, la formule 2A/3≥R est appliquée plus loin avec A=n(n-1)/2+2C. Le lecteur est donc invité à faire très attention à cela dans le début des calculs du milieu de la page suivante où A apparait deux fois dans la première expression mais ceux-ci ne correspondent pas à la même chose.
(6) Dans la première expression les deux A ne correspondent pas au même graphe. L'un est pour le graphe K_n et l'autre pour le graphe obtenu à partir de K_n en voyant chaque croisement comme un sommet (voir la note précédente).
(7) Seulement huit croisements sont marqués en rouge. Cependant il y en a bien 9 sur ce dessin. Le lecteur est invité à le trouver par lui-même.