LE CARRELAGE DE LA REINE

Année 2015-2016

Rami Salingue, Samy Lemzaoui, Jimmy Guesma, Owen Josse, Tristan Bosc, Esther Pamelard, élèves de 4e et de 3e

Encadré·e·s par : Mme Maïouf, M. Duprat

Établissements :Collèges Michelet et Jolimont de Toulouse.

Chercheuse, chercheur **:** Anne Lonjou et Damien Bouloc, institut Mathématique de Toulouse (IMT)

Présentation du sujet :

La reine veut réaliser plus de 200 pavages différents dans son palais, formés seulement de polygones réguliers en pensant que cela est facilement réalisable.

Son carreleur lui indique qu'il n'y a que très peu de combinaisons possibles.

Qu'en pensez-vous?

Nos conclusions :

Si on considère l'énoncé tel que présenté, il y a une infinité de carrelages possibles mais en précisant les conditions sur le carrelage, nous pensons qu'il n'y a que quelques cas possibles.

I- Pavages formés d'un seul type de polygones

Recherchons comment réaliser des pavages avec des polygones réguliers (1) identiques dans chaque pièce.

Il n'existe pas de polygone possédant des mesures d'angles inférieures à 60° et il n'existe pas non plus de polygone dont les mesures des angles sont supérieures à 180° inclus.

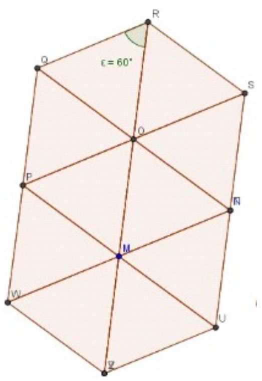
Pour que le pavage puisse se réaliser, les angles des polygones doivent s'emboîter parfaitement. La somme des mesures de leurs angles en un sommet doit donc être égale à 360°. Nous pouvons donc exclure tous les polygones dont la mesure des angles n'est pas un diviseur de 360 pour les pavages à un polygone.

Or, si l'on divise 360 par deux on obtient 180. Il n'existe pas de polygone dont la mesure des angles est égale à 180°. La division suivante est donc par trois ; on obtient 120°, l'angle correspondant à un hexagone.

Ainsi, pour des pavages à un seul polygone, le plus grand polygone utilisable est l'hexagone.

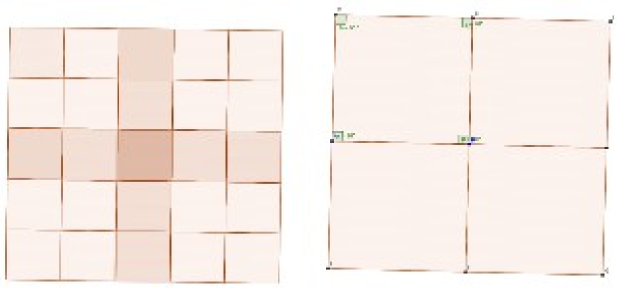
Exemple de pavage avec exclusivement des hexagones

Le plus petit étant le triangle équilatéral, dont les angles sont égaux à 60° en effet 360 : 6 = 60.



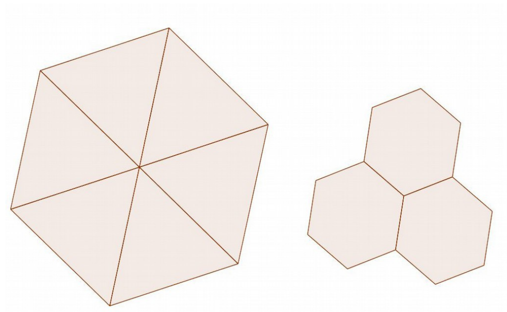
Exemple de pavage avec exclusivement des triangles équilatéraux

Il reste le carré (angles à 90°, diviseur de 360°) et le pentagone (angles à 108°, qui n'est pas un diviseur de 360) ce dernier ne peut pas former de pavage.



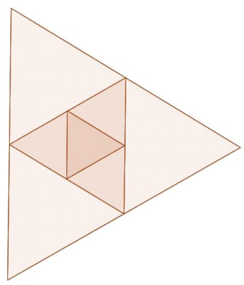
Exemple de pavage avec exclusivement des carrés

Note:

Avec les triangles équilatéraux, dont les angles sont égaux à 60° et qui sont les plus petits polygones réguliers en nombre de côtés on ne peut emboîter que 6 triangles car : *6 × 60 = 360* *A l'inverse l'hexagone, dont les angles sont égaux à 120° et qui est le plus grand polygone régulier pour un pavage régulier de même polygone on ne peut emboîter que 3 hexagones car :* *3 × 120 = 360* *Ainsi le nombre d'angles au niveau de l'assemblage de polygones réguliers doit toujours être compris entre 3 et 6.*	6 x 60 = 360  3 x 120 = 360

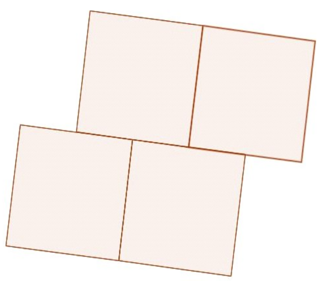
II- Pavages «infinis»

Nous avons trouvé une méthode qui consiste à construire un pavage avec seulement des triangles où l'on construit un triangle à l'intérieur d'un autre triangle et ainsi de suite. Cette méthode aboutit à une infinité de pavages différents.



Pavage « infini » avec des triangles équilatéraux

Une autre méthode consiste à faire un alignement de carrés, en faire un autre en-dessous légèrement décalé par rapport à la première et ainsi de suite. En changeant à chaque fois de «distance» de décalage par rapport à la première ligne, on peut ainsi créer une infinité de pavages différents étant donné qu'il y a une infinité de points dans un côté du carré.



Pavage « infini » avec des carrés

Nous en avons donc déduit qu'il y avait une infinité de pavages différents et donc que la reine avait raison.

Transition

On nous a imposé deux nouvelles contraintes :

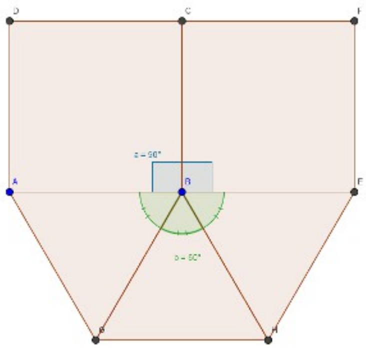
Il faut que les sommets des polygones réguliers n'appartiennent pas aux côtés des autres polygones et qu'il y ait le même nombre d’arêtes qui partent de chaque sommet.

Ainsi, toutes les situations envisagées aboutissant à une infinité de pavages ne sont plus acceptées.

III- Équation essentielle mais insuffisante

Nous avons maintenant cherché une règle ou une équation qui nous permettrait de trouver des pavages avec plusieurs types de polygones et de mieux organiser nos recherches.

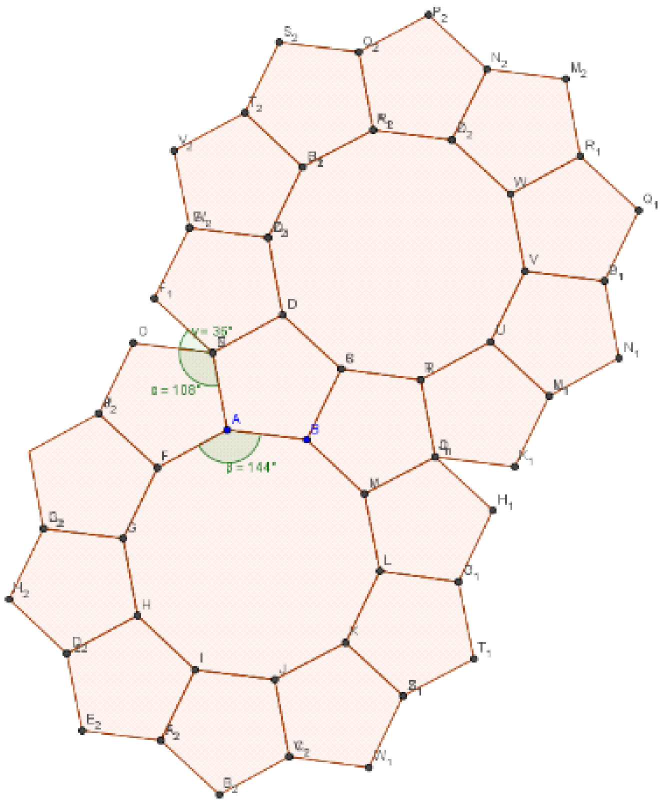
Soit a la mesure d'un angle d'un premier polygone et b celle d'un deuxième (rajouter autant de lettres que nécessaire) ; et x et y le nombre de fois qu'ils sont répétés en un sommet : x a + y b = 360.



Ici, a = 90° et b = 60° x = 2 et y = 3

On a : 90 x 2 + 60 x 3

D'après la note du I- le nombre d'angles au niveau de l'assemblage de polygones réguliers doit être compris entre 3 et 6, ainsi, 3 < x + y < 6.



Cette règle est nécessaire mais n'est pas suffisante.

Exemple :

Les pavages formés de deux pentagones et un décagone ; ici, l'équation marche :

a = 144 et b = 108

x = 1 et y = 2

ainsi, 144 + 2 x 108 = 360°

On arrive pourtant à une configuration où trois pentagones se rencontrent.

Conclusion

Ainsi, sans les contraintes rajoutées, nous pouvons réaliser des pavages à l'infini comme nous l'avons vu dans le II).

Avec une seule sorte de polygone, nous avons vu que nous pouvons réaliser des pavages avec des carrés, des triangles équilatéraux et des hexagones.

Nous avons également trouvé une équation permettant de trouver des combinaisons de polygones réguliers. Un contre-exemple nous a montré qu'elle n'était pas suffisante.

Note d'édition

(1) On rappelle qu'un polygone est dit régulier s'il a tous ses cotés de même longueur et tous ses angles au sommet de même mesure.