Le partage du gâteau

Année 2014 – 2015

Benjamin Ballé, élève de $3^{\text{éme}}3$

Encadré par : Elisabeth Bruyère et Pascal Corm

Etablissements : Collège Raoul Dufy et Collège Henri Longchambon, Lyon

Chercheurs : Valentin Gledel, Aline Parreau (LIRIS, Université Lyon 1)

Présentation du sujet

- Deux personnes doivent se partager un gâteau en ligne composé de parts irrégulières.

Exemple d'un gâteau (1)

1	2	4	1	3	2	4	1

- On ne peut prendre que par les extrémités.
- On joue à tour-de-rôle et on ne prend qu'une part par tour (2)

Le sujet nous disait de trouver un moyen de gagner quoi qu'il arrive !

Exemple d'une partie

1	2	4	1	3	2	4	1
a	b	c	d	e	f	g	h

Chaque lettre représente une part du jeu

Le jeu
- le joueur 1 commence et prend la part a.
- le joueur 2 prend la part b.
- le joueur 1 prend la part c.
- le joueur 2 prend la part d.

- le joueur 1 prend la part e.
- le joueur 2 prend la part h.
- le joueur 1 prend la part g.
- le joueur 2 finit par la part f.

Résultat :

Le joueur 1 a eu a,c,e,g donc : 1+4+3+4 = 11
Le joueur 2 a eu b,d,f,h donc : 1+1+2+2 = 6

Le joueur 1 a gagné !

Solutions

On présente d'abord les résultats pour les petits nombres, puis pour les cas pairs et pour finir les cas impairs (3).

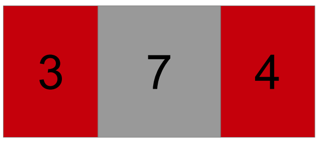
1. Petits nombres

Le cas de une part :
Le joueur 1 va gagner tout le temps car il commence en prenant l'unique part.

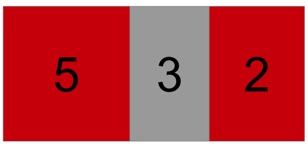
Le cas de deux parts :
Il y a deux possibilités :
- l'égalité si les deux parts sont égales
- la victoire du joueur 1 si une part est plus importante que l'autre (4)

Le cas de trois parts :
Les 3 possibilités :
- Egalité si la part du milieu fait la moitié du gâteau :

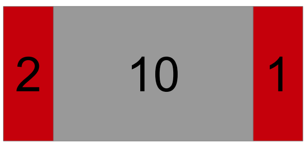
  Le joueur 1 libère la part du milieu



- Joueur 1 gagne si la part du milieu fait moins que la moitié du gâteau

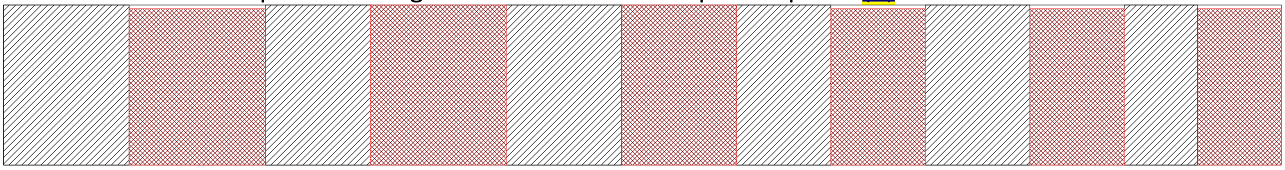


- Joueur 2 gagne si la part du milieu fait plus que la moitié du gâteau

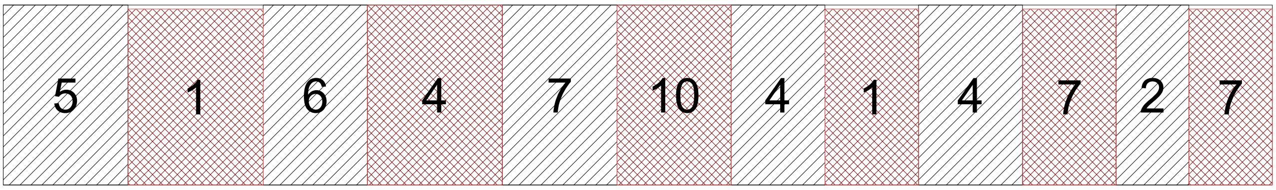


2. **Cas pair** (5)

Ce schéma représente un gâteau avec un nombre pair de parts. (6)



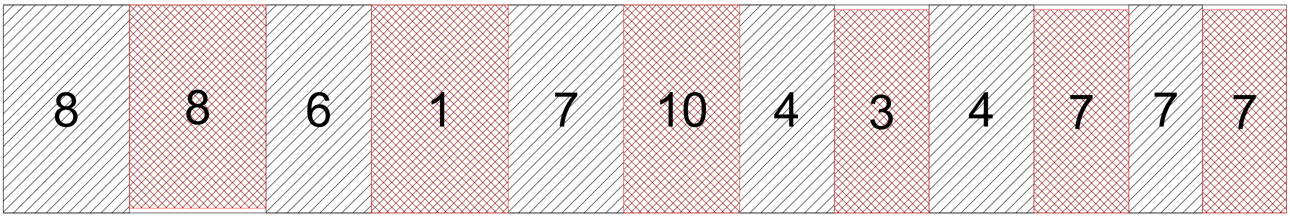
Le joueur 1 dans ce cas peut s'assurer au moins la moitié du gâteau :
il calcule la somme des valeurs des parts rouges et la compare avec la somme des valeurs des parts noires.
Il peut donc choisir la couleur lui permettant de prendre le plus de gâteau.



Somme rouge = 30 Somme noire = 28

Donc le joueur 1 va choisir la couleur rouge.
Il va alors prendre l'extrémité de couleur rouge, ainsi il ne laissera au joueur 2 que le choix des parts noires.

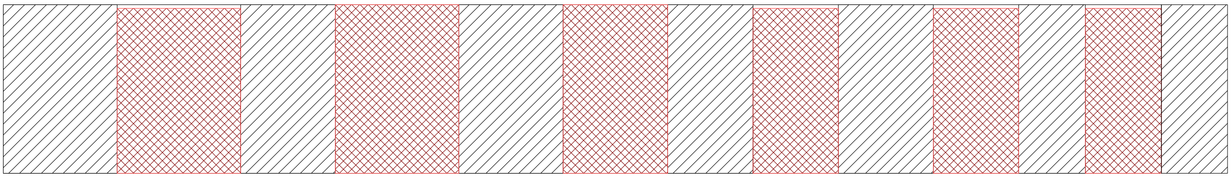
Cas particulier : si les sommes des valeurs de chaque couleur sont égales.
Il peut y avoir égalité.
Le jouer 1 peut néanmoins gagner s'il parvient à créer un avantage par rapport au joueur 2.



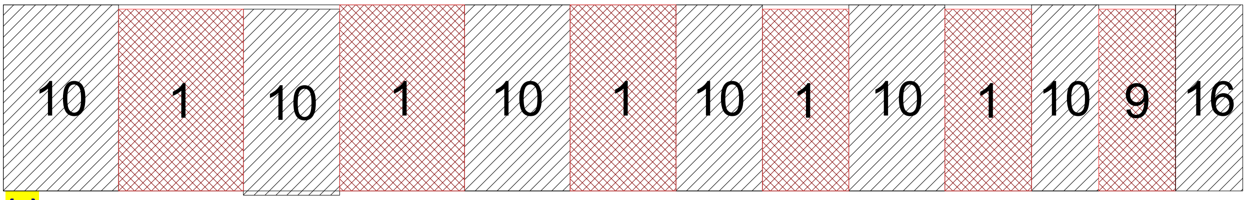
début de la partie :
Joueur 1 : 8 noir+7 rouge +7 rouge =22
Joueur 2 : 8 rouge+7 noir+6 noir = 21

Il reste alors 14 points en rouge et 15 en noir. Le joueur 1 peut donc reprendre la stratégie expliquée ci-dessus pour ne choisir que des parts noires et gagner ainsi la partie par 37 points contre 35.

3. Cas impair



Le joueur 2 se retrouve à la place du joueur 1 dans les cas impairs. En fait, après la prise de l'entame la partie devient comme une partie paire .
Si la couleur rouge fait plus que la moitié du gâteau alors le joueur 2 gagnera .
Le reste des parties dépendra de la compensation de la perte de l'entame
par le joueur 2. (7)



(8)

Suite de la recherche

Etude de gâteaux circulaires.
Le joueur 1 choisit la part qu'il veut. On est ensuite ramené au même problème que pour un gâteau en long.
Dans le cas d'un gâteau circulaire, quel que soit le nombre de parts pair ou impair, il a été démontré que le joueur 1 a la certitude de prendre 4/9 du gâteau. Voir http://arxiv.org/abs/0812.2870, référence donnée par notre chercheuse vénérée (9).

Notes d'éditions
(1) Les chiffres décrivent la taille de chaque part.
(2) Le but du jeu est d'avoir plus de gâteau en fin de partie que l'autre joueur.
(3) L'article présente des stratégies de réussite.
(4) A condition bien sûr que le joueur 1 prenne la plus grosse part !
(5) On pourrait se dire qu'en général la meilleure manière de jouer est de prendre à chaque tour la plus grosse des deux parts. Mais dans l'exemple suivant on montre qu'en suivant cette stratégie naïve, le joueur 1 perd alors qu'en réalité il aurait pu gagner :
2 | 5 | 3 | 1
Stratégie naïve : le joueur 1 prend le 2, puis le joueur 2 prend le 5, puis le joueur 1 prend le 3, puis le joueur 2 prend le 1, ce qui fait 2+3=5 pour le premier joueur, et 5+1=6 pour le deuxième.
Autre stratégie expliquée dans la suite du texte : le joueur 1 prend le 1, puis le joueur 2 prend le 2 ou le 3, ce qui libère de toute façon le 5 que le joueur 1 prend, puis le joueur 2 prend la dernière part, ce qui fait 1+5=6 pour le premier joueur, et 2+3=5 pour le deuxième.
(6) Dans la suite de l'article, le noir correspond aux hachures parallèles, et le rouge aux hachures croisées.
(7) Dans le texte, il n'est pas prouvé que la stratégie décrite est optimale pour le 2ème joueur.
(8) La figure n'est pas commentée dans le texte. Mais on peut voir que même si le joueur 1 choisit la part 16 en premier, alors en choisissant les cases noires, le joueur 2 aura la victoire (avec 60 points contre 16+14=30 points). Si on change 16 contre un nombre beaucoup plus grand, par exemple 60, et que le joueur 1 choisit cette part-là, alors le joueur 2 ne pourra pas lutter et perdra, même avec la meilleure stratégie possible (qui consiste à réussir à prendre toutes les parts de 10).
(9) Kolja B. Knauer, Piotr Micek and Torsten Ueckerdt, How to eat 4/9 of a pizza, Discrete Mathematics, volume 311, issue 16, pages 1635-1645, 2011.