

Le turlupin

Adrien ZANATTA, Jules MIRONE,
Mathis DUBRUL, Riccardo MUTTI

élèves de 5^{ème} 4 et de 4^{ème} 3, Cité Scolaire Internationale
de Grenoble (38)

Enseignants : Mme GUIOL, Mme DUMAS

Chercheur : Romain JOLY

Une grille 3×3

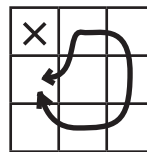
Théorème

On peut toujours écrire le mot TURLUPIN si la case barrée est dans un coin ou au centre.

Grâce aux axes de symétrie de la grille on peut dire que les cases dans les coins (1) sont pareilles, les cases latérales (2) sont pareilles, et la case centrale (3) est toute seule.

1	2	1
2	3	2
1	2	1

Si l'on met la case barrée dans un coin cela marchera tout le temps [quelque soit la case de départ] en imposant une lettre ou aucune car il y a une boucle.



X	I	P
T	N	U
U	R	L

Par symétrie les autres cases dans les angles ont la même propriété.

Si l'on met la case barrée au centre, cela marchera tout le temps en imposant 1 lettre ou zéro car il y a une boucle.

T	U	R
N	X	L
I	P	U

T	U	R
X	U	L
?	P	I

Si l'on met la case grisée dans une case latérale, ça ne marchera jamais.

Nous avons vérifié tous les cas possibles, il restait toujours une case isolée du reste.

Une grille 4×4

Théorème

On peut toujours écrire le mot CARABISTOUILLES lorsqu'on n'impose aucune lettre.

Grâce aux axes de symétrie de la grille on peut dire que les cases dans les coins (1) sont pareilles, les cases latérales (2) sont pareilles, et les cases centrales (3) sont pareilles.

1	2	2	1
2	3	3	2
2	3	3	2
1	2	2	1

Sujet

On dispose d'une grille 3 × 3, dans laquelle on choisit de barrer une case. On doit ensuite écrire les lettres du mot TURLUPIN dans les huit cases restantes, de façon à pouvoir lire ce mot en passant d'une case à une case voisine (verticalement ou horizontalement, mais pas en diagonale). [On s'interdit de passer deux fois sur une même lettre].

On peut imposer la position d'une ou de plusieurs lettres au départ.

Questions

- Peut-on fabriquer une grille à solution unique?
- [Peut-on généraliser à d'autres tailles de grille ?]

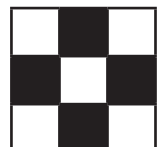
Mots-clés

TURLUPIN, CARABISTOUILLE, CHEMIN, CIRCUIT HAMILTONIEN, GRAPHE, CONDITION NÉCESSAIRE, PARITÉ, QUADRILLAGE, DAMIER

Peu importe là où on met la case barrée, il y aura toujours plusieurs solutions (tant qu'on n'impose pas de lettre au départ).

Le damier

Nous avons regardé l'ensemble des cases où on ne pouvait pas mettre la case barrée dans une grille $n \times n$ où n est impair, en les noircissant nous avons obtenu un damier :



[Note. Les explications qui suivent sont données pour la grille 3×3 mais se généralisent sans problème à la grille $n \times n$. Par convention, le coin inférieur gauche sera toujours blanc]

Nous avons regardé si la case où on mettait telle lettre était noire ou non.

T : oui, U : non, R : oui, L : non, U : oui,
P : non, I : oui et N : non.

X	I	P
T	N	U
U	R	L

Les cases noires et blanches alternent.

Pourquoi ? Parce que toutes les cases noires sont entourées uniquement par des cases blanches et toutes les cases blanches sont entourées uniquement par des cases noires.

[grilles impaires]

Dans une grille 3×3 , il y a 4 cases noires et 5 cases blanches.

① Si on met la case barrée sur une case blanche, on aura 4 cases noires et 4 cases blanches. On peut alterner noires et blanches. [Il n'y a pas d'impossibilité ; des solutions ont été vues pour le 3×3 ; il reste à voir si une solution d'écriture existe en général pour le $n \times n$, n impair.]

② Mais si on met la case barrée sur une case noire, il y aura 3 cases noires et 5 cases blanches. On ne pourra pas alterner et c'est pour cela que ça ne marchera pas ! [Cet argument d'impossibilité se généralise sans difficulté au cas $n \times n$ avec n impair : l'écriture du mot sera impossible si la case barrée est noire]

[grilles paires]

① Sur une grille $n \times n$ où n est pair, il y a autant de cases noires que de cases blanches. Que l'on barre une case noire ou une blanche, on pourra alterner noires et blanches. [Il n'y a pas d'impossibilité *a priori*].

Cependant, il y a une obligation [une condition nécessaire]. *La première lettre du mot (C pour CARABISTOUILLES) doit être sur une case de la couleur opposée de celle de la case barrée.*

En effet, si la case barrée est sur une case noire dans une grille 4×4 , il y aura 7 cases noires et 8 cases blanches. Pour [pouvoir] alterner, il faudra donc commencer par une case blanche.

[Cela nous donne une condition nécessaire à l'écriture du mot. Il reste à voir si une écriture complète est toujours réalisable.]
