

Des nombres en colonne.

Elèves : Léo, Paul, Aymeric, Grégoire, Sandra, Clara, Julien, Valentin, Manon, Maxime,

Chercheur : Xavier Buff

Enseignants : Anaïs Dehez, Claire Flipo, Frédérique Fournier

1. Le problème

Voici le problème posé par Xavier Buff, enseignant-chercheur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse : « Si je prends un nombre à quatre chiffres et que j'écris les uns en dessous des autres ses produits par 1 ; 2 ; 3 .. jusqu'à 9, j'affirme que chaque colonne contient au moins le chiffre 0 ou le chiffre 9.

Exemple : nombre choisi	chiffre d. de mille	chiffre u. de mille	chiffre centaine	chiffre dizaine	chiffre unité
7524					
7524 x 1 = 7524	0	7	5	2	4
7524 x 2 = 15048	1	5	0	4	8
7524 x 3 = 22572	2	2	5	7	2
7524 x 4 = 30096	3	0	0	9	6
7524 x 5 = 37620	3	7	6	2	0
7524 x 6 = 45144	4	5	1	4	4
7524 x 7 = 52668	5	2	6	6	8
7524 x 8 = 60192	6	0	1	9	2
7524 x 9 = 67716	6	7	7	1	6

Dans chaque colonne, apparaît bien un 0 ou un 9. »

2. Les premières recherches.

Nous avons fait des essais... chacun de nous choisissait un nombre, effectuait les produits, et vérifiait si l'affirmation de Xavier était vraie. Nous avons très vite décidé d'utiliser un tableur pour effectuer les calculs, mais nous continuions à vérifier « à la main ». A chaque fois, l'affirmation était vraie, et [1] nous ne trouvions pas de contre-exemple. Alors nous avons décidé d'étudier les chiffres des produits obtenus.

3. Etude des chiffres des produits

Deux colonnes nous ont paru simples à étudier : celles du chiffre des unités, celle du chiffre des centaines de mille.

a. Le chiffre des unités

Celui-ci est obtenu par le produit des unités du chiffre choisi et les résultats de sa table :

En effet, si on reprend 7524 et les produits à effectuer :

7524 x 14	7524 x 28	7524 x 32	7524 x 46	7524 x 50	7524 x 64	7524 x 78	7524 x 82	7524 x 96
----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

Le produit 7524 par 5 a un 0 comme chiffre des unités.

Nous avons repris toutes les tables de multiplications que nous avons apprises à l'école et observé la colonne des unités : nous nous sommes ainsi assurés qu'il y avait bien, pour chaque table, un produit dont le chiffre des unités est 0 ou 9 :

table de 1	table de 2	table de 3	table de 4	table de 5	table de 6	table de 7	table de 8	table de 9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Première conclusion : quel que soit le nombre à quatre chiffres choisi, l'un de ses produits au moins par 1 ; 2 ; 3 ... 9 possède un 0 ou un 9 comme chiffre des unités.

b. Le chiffre des dizaines de mille

Puisque le nombre choisi est à quatre chiffres, le chiffre des dizaines de mille est soit 0 soit obtenu par retenue dans la multiplication :

nombre choisi :		2317				
		chiffre d. de mille	chiffre u. de mille	chiffre centaine	chiffre dizaine	chiffre unité
2317 x 1 =	2317	0	2	3	1	7
2317 x 2 =	4634	0	4	6	3	4
2317 x 3 =	6951	0	6	9	5	1
2317 x 4 =	9268	0	9	2	6	8
2317 x 5 =	11585	1	1	5	8	5
2317 x 6 =	13902	1	3	9	0	2
2317 x 7 =	16219	1	6	2	1	9
2317 x 8 =	18536	1	8	5	3	6
2317 x 9 =	20853	2	0	8	5	3

Il suffisait donc de choisir le plus grand nombre à 4 chiffres ... et d'effectuer le plus petit produit : $9999 \times 1 = 9999 = 09999$

Deuxième conclusion : quel que soit le nombre à quatre chiffres choisi, l'un de ses produits au moins, part 1 ;2 ; 3 ... 9 ; possède un 0 comme chiffre des dizaines de mille. [2]

c. Les autres colonnes

Les chiffres des autres colonnes, ne proviennent pas directement des tables, comme pour celui des unités : il y a des retenues !

Nous n'avons pas trouvé comment prouver que ces colonnes contenaient bien un 0 ou un 9 ... alors nous avons décidé de faire effectuer et tester par l'ordinateur tous les produits de tous les nombres à 4 chiffres par 1 ;2 ;3 ; ...

Troisième conclusion : quel que soit le nombre à quatre chiffres choisi, l'un au moins de ses produits par 1 ;2 ;3 ;... 9 possède un 0 ou un 9 comme chiffre des dizaines, centaines et unité de mille.

Les trois conclusions précédentes nous permettaient de conclure que l'affirmation de Xavier Buff était vraie.

Cependant nous étions frustrés de n'avoir pas trouvé de raisonnement général ...et de n'avoir comme argument que la vérification de tous les produits ...

Lors d'un séminaire, Xavier nous a alors posé les deux questions suivantes :

- **question 1 : que se passe-t-il lorsque je soustrais deux nombres d'une même table ?**

- **question 2 : une colonne peut-elle contenir deux chiffres identiques et pas de 0 ou de 9 ?**

4. Etude de la table d'un nombre

Voici l'une des diapositives présentées lors de l'exposé :

nombre choisi :	7878
x 1	7878
x 2	15756
x 3	23634
x 4	31512
x 5	39390
x 6	47268
x 7	55146
x 8	63024
x 9	70902

Observation:

$47268 - 31512 = 15756$

Ligne 6 – ligne 4 = ligne 2

Comment expliquer ce résultat ?
6 fois le nombre 7878 moins 4 fois le nombre 7878 donne bien 2 fois le nombre 7878

De manière générale :

On appelle N le nombre entier choisi.

Deux nombres de la table de N s'écrivent : aN et bN, avec a et b, deux entiers distincts compris entre 1 et 9. On peut supposer $a > b$.

Leur différence vaut donc : $aN - bN = (a-b) \times N = c \times N$, c nombre entier entre 1 et 9 donc vaut un nombre de la table de N.

Réponse à la question 1 : la différence de deux nombres d'une même table est égale à l'un des nombres de cette table.

5. Etude des chiffres de chaque colonne

Chaque colonne de la table d'un nombre contient neuf lignes.

Nous disposons de dix chiffres pour remplir chaque colonne : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Il y a donc deux possibilités pour « remplir » une colonne :

- soit tous les chiffres sont différents
- soit il y a au moins deux chiffres identiques

a. tous les chiffres d'une même colonne sont différents.

Dans ce cas, on y trouve 1,2,3,4,5,6,7,8, puis il reste une place : donc forcément : 0 ou 9

b. il y a au moins deux chiffres identiques

Imaginons qu'une colonne contienne deux chiffres identiques. D'après le paragraphe précédent, la différence des deux nombres contenant ces chiffres identiques, donne un nombre de la table :

On a donc deux cas à envisager : soit la soustraction présente une retenue, soit elle n'en présente pas :

<p style="text-align: center;">Premier cas : sans retenue</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>nombre choisi</th> <th>chiffre d. de mille</th> <th>chiffre u. de mille</th> <th>chiffre centaines</th> <th>chiffre dizaines</th> <th>chiffre unité</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>7165</td> <td>7</td> <td>1</td> <td>6</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>x1</td> <td>0</td> <td>7</td> <td>1</td> <td>6</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>x2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>x3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>9</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>x4</td> <td>2</td> <td>8</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>x5</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>2</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>x6</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>x7</td> <td>5</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>x8</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>x9</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table> <div style="margin-left: 100px; margin-top: 10px;"> $\begin{array}{r} 57320 \\ - 7165 \\ \hline 50155 \end{array}$ </div> <p style="margin-top: 20px;">Ligne 8 – ligne 1 = ligne 7 D'où le 0 ligne 7 colonne unité de mille</p>	nombre choisi	chiffre d. de mille	chiffre u. de mille	chiffre centaines	chiffre dizaines	chiffre unité	7165	7	1	6	5		x1	0	7	1	6	5	x2	1	4	3	3	0	x3	2	1	4	9	5	x4	2	8	6	6	0	x5	3	5	8	2	5	x6	4	2	9	9	0	x7	5	0	1	5	5	x8	5	7	3	2	0	x9	6	4	4	8	5	<p style="text-align: center;">Deuxième cas : avec retenue</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>nombre choisi</th> <th>chiffre d. de mille</th> <th>chiffre u. de mille</th> <th>chiffre centaines</th> <th>chiffre dizaines</th> <th>chiffre unité</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>5883</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>x1</td> <td>0</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>x2</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>x3</td> <td>1</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>x4</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>x5</td> <td>2</td> <td>9</td> <td>4</td> <td>1</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>x6</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>2</td> <td>9</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>x7</td> <td>4</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>8</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>x8</td> <td>4</td> <td>7</td> <td>0</td> <td>6</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>x9</td> <td>5</td> <td>2</td> <td>9</td> <td>4</td> <td>7</td> </tr> </tbody> </table> <div style="margin-left: 100px; margin-top: 10px;"> $\begin{array}{r} 52947 \\ - 17649 \\ \hline 35298 \end{array}$ </div> <p style="margin-top: 20px;">Ligne 8 – ligne 3 = ligne 5 D'où le 9 de la ligne 5 colonne unité de mille</p>	nombre choisi	chiffre d. de mille	chiffre u. de mille	chiffre centaines	chiffre dizaines	chiffre unité	5883	5	8	8	3		x1	0	5	8	8	3	x2	1	1	7	6	6	x3	1	7	6	4	9	x4	2	3	5	3	2	x5	2	9	4	1	5	x6	3	5	2	9	8	x7	4	1	1	8	1	x8	4	7	0	6	4	x9	5	2	9	4	7
nombre choisi	chiffre d. de mille	chiffre u. de mille	chiffre centaines	chiffre dizaines	chiffre unité																																																																																																																																
7165	7	1	6	5																																																																																																																																	
x1	0	7	1	6	5																																																																																																																																
x2	1	4	3	3	0																																																																																																																																
x3	2	1	4	9	5																																																																																																																																
x4	2	8	6	6	0																																																																																																																																
x5	3	5	8	2	5																																																																																																																																
x6	4	2	9	9	0																																																																																																																																
x7	5	0	1	5	5																																																																																																																																
x8	5	7	3	2	0																																																																																																																																
x9	6	4	4	8	5																																																																																																																																
nombre choisi	chiffre d. de mille	chiffre u. de mille	chiffre centaines	chiffre dizaines	chiffre unité																																																																																																																																
5883	5	8	8	3																																																																																																																																	
x1	0	5	8	8	3																																																																																																																																
x2	1	1	7	6	6																																																																																																																																
x3	1	7	6	4	9																																																																																																																																
x4	2	3	5	3	2																																																																																																																																
x5	2	9	4	1	5																																																																																																																																
x6	3	5	2	9	8																																																																																																																																
x7	4	1	1	8	1																																																																																																																																
x8	4	7	0	6	4																																																																																																																																
x9	5	2	9	4	7																																																																																																																																
<p>Cas général</p> $\begin{array}{r} \cdot \quad a \quad \cdot \\ - \quad \cdot \quad a \quad \cdot \\ \hline \cdot \quad 0 \quad \cdot \end{array}$ <p>$a - a = 0$</p> <p>Conséquence : un des nombres de la table</p>	<p>Cas général</p> <p>La plus grande retenue possible est 1</p> $\begin{array}{r} \cdot \quad 1a \quad \cdot \\ - \quad \cdot \quad 1a \quad \cdot \\ \hline \cdot \quad 9 \quad \cdot \end{array}$ <p>$(10+a)-(a+1) = 10 + a - a - 1 = 9$</p> <p>Conséquence : un des nombres de la table</p>																																																																																																																																				

contient un 0 dans cette colonne.	contient un 9 dans cetet colone
-----------------------------------	---------------------------------

Conclusion : chaque colonne contient un 0 ou un 9.

6. Réponse au problème

L'affirmation de Xavier Buff est donc vraie, et peut même être étendue à des nombres de 5, 6 , 7... chiffres...

Notes d'édition

[1] Il serait plus juste de dire que l'affirmation est "vérifiée".

[2] Quand on multiplie un nombre de 4 chiffres par 1, on obtient le même nombre, et on est certain que le chiffre des dizaines de mille est 0.