Pavage d'un plan

BRETON Antoine, BRIOLLANT Quentin, DUFOUR Céline, GENEVAY Mathilde, HEMERY Thomas, LASFARGUES Paul, LESPINASSE Lucie.

Lycée Sud Médoc, Le Taillan Médoc &
Lycée Montaigne, Bordeaux
Professeurs : Mme GRIHON et Mr MAIMARAN ;
Mr CARCONE et Mr GRIHON
Chercheur : Mr Robert DEVILLE, Univ. Bordeaux1

Sujet

Comment paver le plan avec un motif géométrique unique, ou avec deux motifs différents ? A vous de laisser aller votre imagination. Et si vous paviez le plan avec un logo pour Math en Jeans de votre invention ? *Piste 1 :* Soit ABC un triangle isocèle en A tel que l'angle A soit la moitié de chacun des deux autres angles. On découpe ce triangle en suivant la bissectrice de l'angle en B. On peut alors essayer de paver le plan à l'aide de copies (de même taille) des deux triangles ainsi obtenus.

Le nombre d'or est l'unique rapport a/b entre deux longueurs a et b avec a>b de telle sorte que (a+b) / a = a/b.

Piste 2 : On peut aussi essayer de paver le plan avec une suite de carrés de tailles toutes différentes, tel que le rapport entre les cotés de deux carrés successifs est toujours égal au nombre d'or.

Résumé

Notre sujet est de paver un plan. Nous avons débuté nos recherches en cherchant comment paver un plan avec une seule figure régulière puis avec deux. Nous avons ensuite pavé le plan à l'aide de triangles d'or (triangle isocèle dont le rapport entre ses côtés est le nombre d'or et dont les angles à la base mesurent le double du troisième angle). Nous avons ensuite crée un logo «math en jeans» avec lequel nous pouvons paver le plan.

Mots-clés

PAVAGE, PLAN, POLYGONE RÉGULIER, TRIANGLE D'OR, NOMBRE D'OR

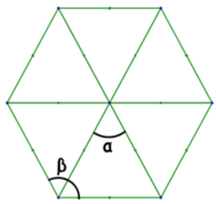
Pavage d'un plan à l'aide d'une figure régulière.

Nous avons remarqué que nous pouvions paver un plan avec des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones. A partir de cette observation nous avons cherché une fonction pour déterminer si c'était les seules figures régulières possibles pour paver un plan et pour déterminer si nous pouvions paver le plan avec d'autres figures.

Une figure régulière étant composée d'autant de triangles isocèles que de cotés, nous avons trouvé l'équation suivante :

$$y = \frac{360}{180 - 360/x}$$

Qui relie le nombre x de cotés de la figure et le nombre y de fois que l'on peut juxtaposer la figure autour d'un sommet.



Cette équation se divise en plusieurs parties : la première partie revient à chercher l'angle a, la seconde partie 180-360/x revient à chercher l'angle β et diviser 360 par le résultat précédent pour déterminer le nombre de fois que l'on peut mettre l'angle sur 360°, soit le nombre de figure. A partir de cette formule nous pouvons conclure que nous ne pouvons paver le plan qu'avec, comme figures régulières, les triangles équilatéraux, les rectangles et carrés et les hexagones. En effet on a :

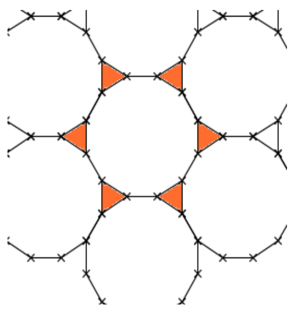
$$y = \frac{360}{180 - 360/x} = \frac{2x}{x-2}$$

Donc

x	3	4	5	6	$x>6$
y	6	4	10/3	3	$y<3$

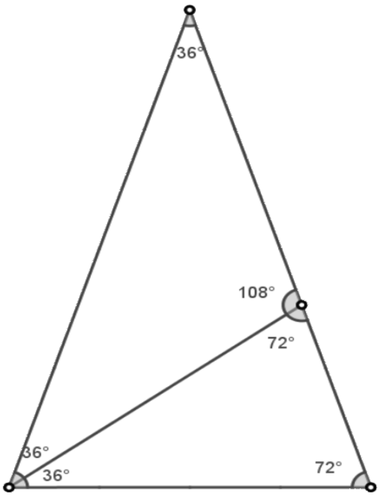
A partir d'ici, nous avons remarqué que nous pouvions **paver le plan avec deux figures**. Nous avons commencé nos recherches à partir d'un exemple : pour x=12; y=2,4. Nous pouvons donc mettre cette figure 2,4 fois pour paver le plan. 2 correspond à un angle de 150°, par un produit en croix nous déterminons que 0,4 correspond à un angle de 60°. Par ailleurs un angle de 60°, dans une figure régulière correspond à un triangle équilatéral..

Nous pouvons donc paver un plan avec un dodécagone régulier et un triangle équilatéral

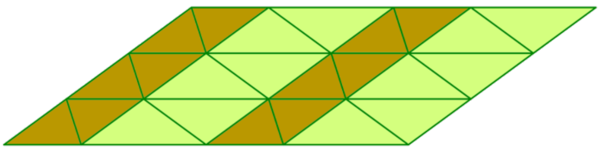


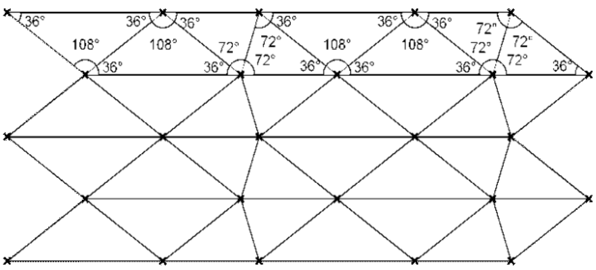
Nous nous sommes ensuite penchés sur le cas du triangle d'or. Le **triangle d'or** est un triangle isocèle dont le rapport entre son côté le plus court et un des grands côtés est égale au nombre d'or qui est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous partageons ce triangle en deux selon la bissectrice d'un des angles de la base. Nous obtenons ainsi deux triangles isocèles dont l'un est la réduction du triangle d'origine.



Grâce à ces deux triangles que nous disposons de afin d'obtenir des parallélogrammes ou des agrandissements du triangle d'or, nous avons une infinité de solutions pour paver le plan.





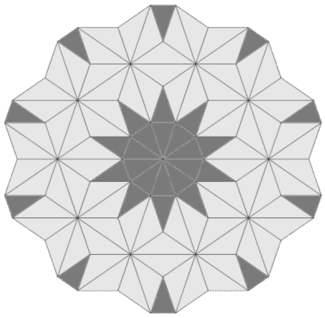
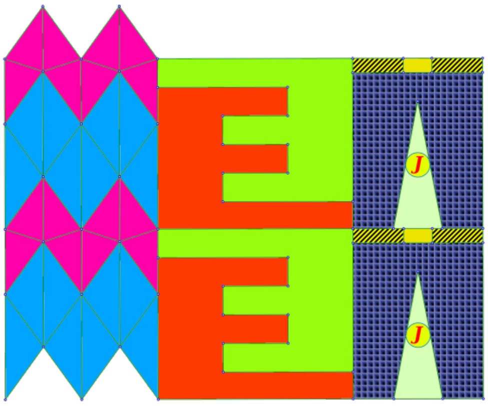


Figure obtenue avec des triangles d'or

Pour finir, nous avons tenté de créer un logo M.A.T.H.E.N.J.E.A.N.S. qui puisse paver le plan. Nous avons ainsi réalisé un M composé uniquement de triangles d'or coupés selon la bissectrice d'un angle à la base, un E composé de rectangles et une forme de jean.



Exploration de **pavages avec d'autres figures** à l'aide de translations et de rotations