Question de vie ou de mort

les automates cellulaires

Année 2014-2015

Léo Courtel, Emmanuel Jouan, Geneviève Le Foll, Nolwenn Martin, Judoce Menguy, Melvin Moisan , Arthur Raffin, Elouan Tourlière, élèves de 4ème

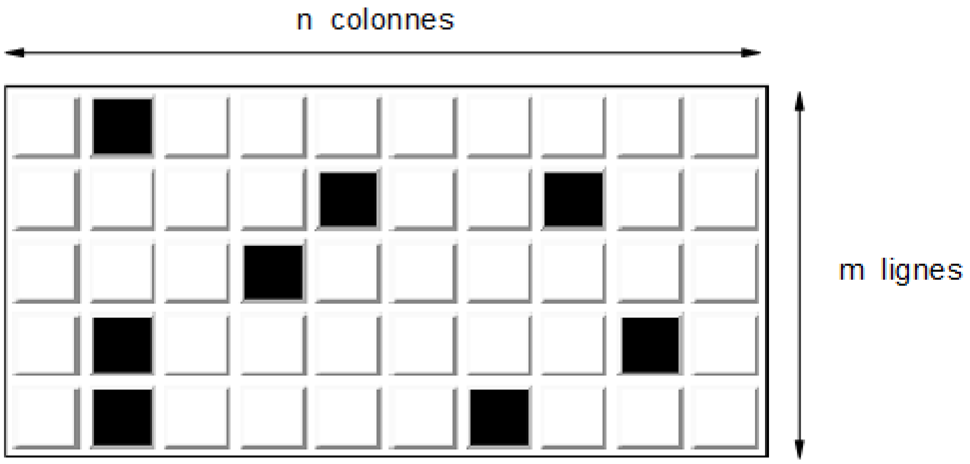
Encadrés par Mme Béasse, Mme Boillot

Établissement : Collège St-Pierre, Plouha

Chercheur : Victor Kleptsyn, CNRS, Université de Rennes 1.

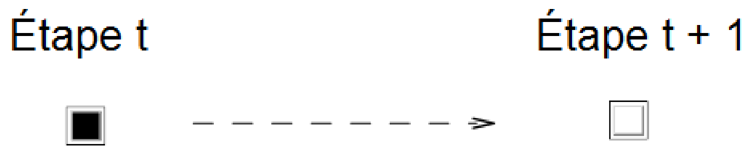
Présentation du sujet :

Nous avons travaillé sur les automates cellulaires : il s'agit de quadrillages m x n (m lignes et n colonnes) dans lesquels chaque case du quadrillage est une cellule. Cette cellule peut être soit vivante soit morte.

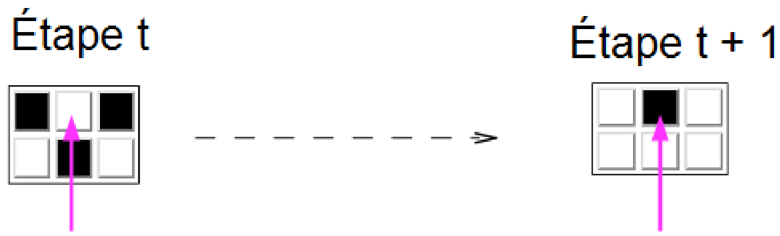


L'automate évolue au fil du temps selon des règles précises.

- Si une cellule est vivante à l'étape *t* , alors à l' étape *t* + 1 elle sera morte.



- Si une cellule est morte à l'étape *t* , alors à l' étape *t* + 1 elle doit être entourée d'un nombre impairs de cellules vivantes pour renaître



On considère que les cellules voisines d'une cellule sont celles qui se trouvent au dessus, en dessous, à gauche et à droite de cette cellule.
Les cellules qui se trouvent dans les diagonales ne sont pas considérées comme « voisines » d'une cellule donnée.

Notre objectif était de déterminer pour un automate donné si il existait une configuration de départ pour que l'automate vive éternellement c'est-à-dire qu'il existe toujours au moins une cellule vivante.

<u>Conjectures et résultats obtenus :</u>

Nous avons démontré que :

- si un automate cellulaire de taille 1 x n vit éternellement, alors son double symétrique de taille 1 x 2n vivra éternellement aussi.
- si un automate cellulaire de taille 1 x n vit éternellement, alors son double symétrique de taille 1 x 2n+1 vivra éternellement aussi.
- Si un automate cellulaire de taille 1 x n vit éternellement alors on est capable de trouver un automate cellulaire de taille m x n qui vit éternellement.

Au cours de notre recherche, nous avons aussi trouvé un résultat annexe : une méthode pour déterminer le nombre de configurations de départ possibles pour un automate de taille m x n.

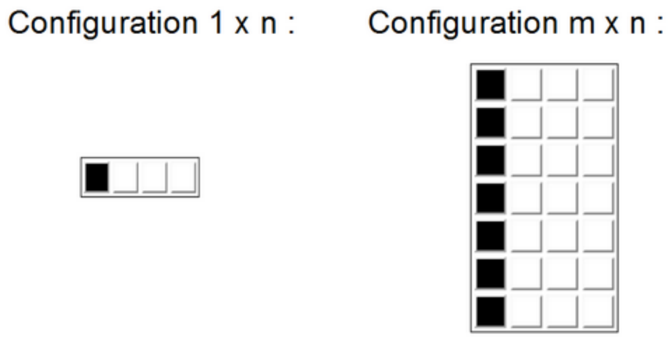
<u>Passage de 1 x n à m x n</u>

Une question nous a été posée : « Est-ce qu'on peut trouver une configuration de départ qui vit éternellement ? »
Pour y répondre, nous avons étudié les automates de taille 1 x n (1 ligne et n colonnes) et nous avons découvert que lorsqu'un automate cellulaire de taille 1 x n vivait éternellement alors, un automate cellulaire de taille m x n peut vivre éternellement en superposant m lignes identiques.

Nous allons vous expliquer comment nous avons procédé :

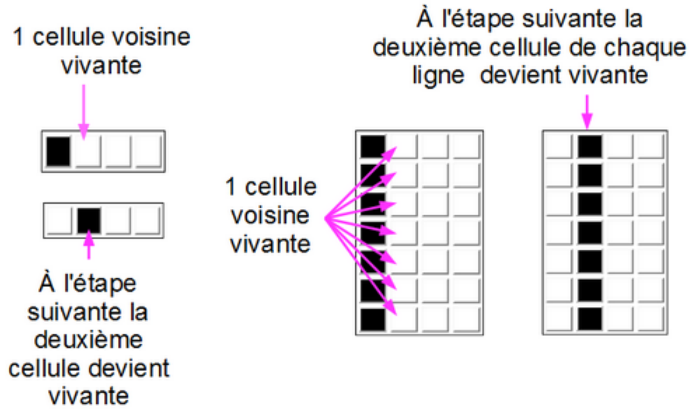
Si dans un automate cellulaire de taille 1 x 4 par exemple, nous savons que cet automate peut vivre éternellement en mettant la première cellule à gauche vivante, alors pour un automate cellulaire de taille 7 x 4 par exemple, nous avons superposé 7 fois la ligne 1 x 4 en mettant la première colonne à gauche vivante.

<u>Voici un exemple :</u>



Reprenons le cas de l'automate 1 x 4 : à l'étape suivante, la cellule à droite de la case vivante deviendra vivante et la cellule qui était vivante à l'étape précédente deviendra morte.
Nous avons comparé ce résultat avec celui de l'automate 7 x 4 et nous avons pu observer que cet automate évoluait de la même manière c'est-à-dire qu'à la deuxième étape toute la 1ère colonne deviendra morte et la colonne située à sa droite deviendra vivante.

Nous avons donc remarqué que l'automate de taille 7 x 4 évoluait de la même manière que les automates de taille 1 x 4.



Nous avons alors essayé de démontrer que les lignes de l'automate m x n évoluaient indépendamment les unes des autres : en effet, nous pouvons observer que les cellules qui pourront faire renaître une cellule morte seront celles qui seront disposées à sa gauche et à sa droite. Les cellules qui sont au dessus et au dessous ne pourront pas influencer cette cellule morte car une cellule, qu'elle soit morte ou vivante, a obligatoirement au dessus et au dessous d'elle des cellules semblables à elle car l'automate est constitué de lignes identiques. Donc au final, les seules cellules qui pourront faire renaître une cellule morte seront les cellules disposées à sa gauche et à sa droite. Nous en avons donc conclu que les lignes évoluaient indépendamment les unes des autres et donc que si un automate de taille 1 x n vivait éternellement alors, un automate de taille m x n fabriqué en superposant m lignes identiques vivrait lui aussi éternellement .

<u>Les automates de taille 1 x 1, 1 x 2 et 1 x 3</u>

Les premiers automates que nous avons étudiés sont les automates de taille 1 x 1, 1 x 2, 1 x 3.
<u>Si on prend l'automate de taille 1 x 1 :</u>

- Soit à la première étape, on met la cellule vivante et à la deuxième étape cette cellule deviendra morte et ne pourra pas renaître.

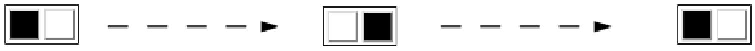
- Soit on prend comme configuration de départ la cellule morte à la première étape et à la deuxième étape elle restera morte.

Donc cet automate de taille 1 x 1 ne peut en aucun cas vivre éternellement.

<u>Si on prend l'automate de taille 1 x 2 :</u>

- Si on prend comme configuration de départ la première cellule vivante, à la deuxième étape elle deviendra morte et sa voisine vivante et à la troisième étape on retrouvera la configuration de départ c'est-à-dire la première cellule vivante et la deuxième morte.

- Si on prend comme configuration de départ la deuxième cellule vivante et la première cellule morte alors à la deuxième étape cette cellule deviendra morte et sa voisine vivante et on retrouve à nouveau la configuration de départ.



Donc cet automate de taille 1 x 2 peut vivre éternellement.

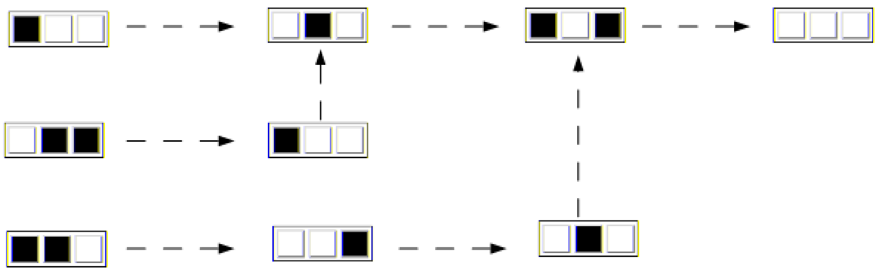
<u>Si on prend l'automate de taille 1 x 3 :</u>

- Si comme configuration de départ on prend la première cellule vivante alors à la deuxième étape cette cellule deviendra morte et la cellule du milieu deviendra vivante, à l'étape suivante les cellules une et trois deviendront vivantes et celle du milieu sera vivante et à la dernière étape cet automate deviendra mort. En effet, la cellule du milieu ne pourra pas renaître car elle a deux voisines vivantes et deux est un nombre pair. Cette configuration ne pourra pas vivre éternellement.

- Si on prend comme configuration de départ les cellules une et deux vivantes, à la deuxième étape ces 2 cellules deviendront mortes et la la troisième cellule deviendra vivante. A l'étape suivante la dernière cellule sera morte et la deuxième cellule deviendra vivante, on retrouve la configuration précédente ; donc là encore, cette configuration ne peut pas vivre éternellement.

- Si on prend comme configuration de départ les cellules deux et trois vivantes alors à la deuxième étape la première cellule deviendra vivante et les cellules deux et trois seront mortes. A l'étape suivante la première cellule sera morte et la cellule du milieu deviendra vivante, on retrouve la configuration précédente ; donc cette configuration ne peut pas non plus vivre éternellement.

On observe sur ce schéma que toutes les configurations de départ possibles sont testées à un moment ou à un autre. Donc aucun automate de taille 1 x 3 ne peut vivre éternellement.

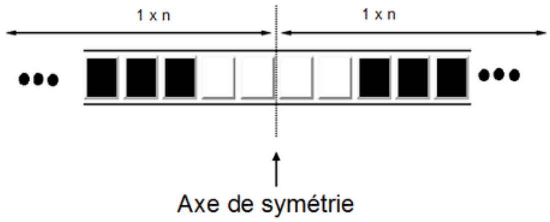


On en déduit que l'automate de taille 1 x 1 ne peut pas vivre éternellement, que l'automate de taille 1 x 2 peut vivre éternellement et que l'automate de taille 1 x 3 ne peut pas vivre éternellement.

Le « double symétrique »

Nous avons découvert que si un automate de taille 1 x n vit éternellement, alors son double symétrique 1 x 2n vit aussi éternellement.

Ce qu'on entend par double symétrique, c'est le fait de poser l'un à coté de l'autre 2 blocs de taille 1 x n, le bloc de droite étant le symétrique du bloc de gauche.



Nous avons en effet repéré, que dans ce cas, le bloc de droite 1 x n n'influence pas le bloc de gauche 1 x n.

En effet de part et d'autre de l'axe de symétrie, il ne peut y avoir que 2 cellules mortes ou 2 cellules vivantes.

Si elles sont vivantes, à l'étape d'après elles seront mortes et on est ramené au cas de 2 cellules mortes.

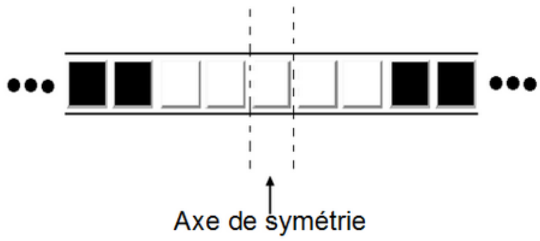
Si elles sont mortes, à l'étape d'après les seules voisines qui sont susceptibles de les faire renaître sont :

- à leur droite pour le bloc de droite.
- à leur gauche pour le bloc de gauche.

On en conclut que le bloc de droite n'influence pas le bloc de gauche.

On a parlé de « rebond » le long de l'axe.
Nous avons également démontré que si un automate de taille 1 x n vit éternellement alors un automate de taille 1 x (2n+1) vit éternellement aussi :

On place un bloc 1 x n et on place un autre autre bloc 1 x n à sa droite symétriquement mais on intercale une cellule morte au milieu des deux blocs.



Cette cellule restera morte car :

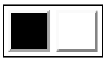
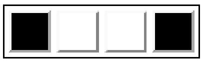
- soit elle sera entourée de deux cellules mortes donc elle ne pourra pas revivre
- soit elle sera entourée de deux cellules vivantes, mais si elle est entourée d'un nombre pair de cellules vivantes, elle ne renaît pas non plus donc cette cellule restera morte éternellement.

  Comme dans le cas précédent (de 1 x 2n) les blocs 1 x n évolueront indépendamment et les cellules feront comme un rebond sur la cellule du milieu .

1er Bilan

- Un automate de taille 1 x 1 ne peut en aucun cas vivre éternellement.

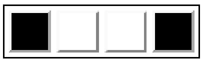
- Puisqu'un automate de taille 1 x 2 vit éternellement, un automate de taille 1 x 4 et de taille 1 x 5 vit éternellement aussi. C'est-à-dire que puisqu'on sait résoudre le cas de l'automate de taille 1 x 2, on pourra résoudre le cas de son double symétrique
c'est-à-dire 1 x 4 et celui de son double symétrique + 1, c'est-à-dire 1 x 5.

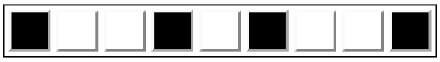




1x2 son double symétrique = 1x4 et son double symétrique + 1 = 1x5

- Puisqu'un automate de taille 1 x 3 ne vit pas éternellement, nous avons un problème pour les automates de taille 1 x 6 et de taille 1 x 7 : pour cela il faut voir si on trouve une configuration particulière différente qui puisse vivre éternellement.

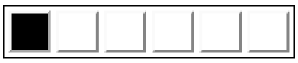
- Puisqu'un automate de taille 1 x 4 vit éternellement, un automate de taille 1 x 8 et de taille 1 x 9 vit éternellement aussi.





1x4 son double symétrique = 1x8 et son double symétrique + 1 = 1x9

- Pour un automate de taille 1 x 6, nous avons trouvé très vite une configuration particulière qui vit éternellement, il suffit de commencer par une cellule vivante tout à gauche.

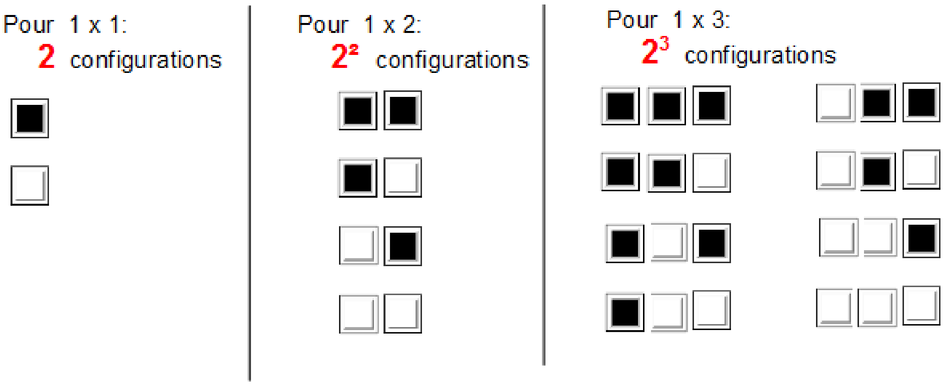


L'automate cellulaire de taille 1 x 7

Comme l'automate cellulaire de taille 1 x 7 ne peut pas être créé avec la méthode du « double symétrique +1 »
(puisque 1 x 3 ne vit pas éternellement, alors son double symétrique 1 x (6 + 1) ne peut pas être créé de cette manière), nous avons cherché une configuration de l'automate cellulaire de taille 1 x 7 qui vive éternellement sans être crée à partir de l'automate 1x3.

Comme on ne trouvait pas tout de suite de solution, on s'est demandé combien de configurations différentes nous risquions d'avoir à tester.

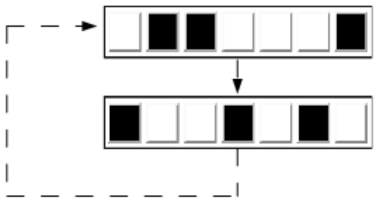
Voilà comment nous avons procédé :



Pour 1 x 7 : 2^7 configurations c'est-à-dire **128 !**

Pour trouver le nombre de configurations différentes de taille 1 x 2, il suffit d'ajouter devant chaque automate de taille 1 x 1, soit une cellule vivante, soit une cellule morte. Cela double donc le nombre de configurations.
Nous faisons de même pour l'automate de taille 1 x 3. On ajoute devant chaque automate de taille 1 x 2, soit une cellule morte, soit une cellule vivante. On s'aperçoit que le nombre de configurations double encore.
Nous avons continué ainsi jusqu'à arriver à l'automate de taille 1 x 7 pour lequel nous avons trouvé 128 configurations différentes à essayer soit 2^7 configurations.
Heureusement, nous n'avons pas eu à toutes les tester !

Voici une des configurations que nous avons finalement trouvée :



On peut en conclure que l'automate de taille 1 x 7 peut vivre éternellement.

Deuxième Bilan

- Puisque les automates de taille 1 x 6 et de taille 1 x 7 peuvent vivre éternellement, un automate de taille 1 x 12 et de taille 1 x 13 d'une part, de taille 1 x 14 et 1 x 15 d'autre part, vivent éternellement aussi.

1x6 son double symétrique = 1x12 son double symétrique + 1 =1x13

1x7 son double symétrique = 1x14 son double symétrique + 1 =1x15

- Puisqu'on a démontré que tous les automates 1 x n vivent éternellement sauf un automate de taille 1 x 1 et de taille 1 x 3, on sait démontrer que tous les automates de taille m x n peuvent vivre éternellement aussi (d'après le résultat donné dans le paragraphe 2).

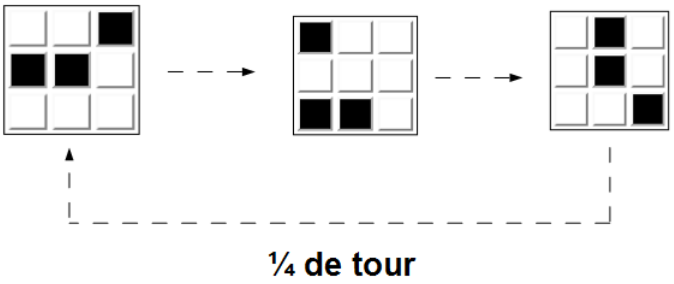
- Le seul problème restant à résoudre est le cas de l'automate cellulaire de taille 3 x 3.

<u>L'automate cellulaire de taille 3 x 3</u>

Nous nous sommes demandé si l'automate de taille 3x3 vit éternellement puisque l'automate de taille 1x3, lui, ne vit pas éternellement. Là encore, pour le plaisir, nous avons désiré savoir combien de configurations différentes nous risquions d'avoir à tester. Pour trouver ce nombre, nous avons raisonné de cette manière :

- Pour l'automate de taille 1x3, il y a 8 configurations différentes
- donc pour chaque ligne de l'automate de taille 3x3, il va y avoir 8 configurations différentes
- Nous en avons donc déduit qu'il y a 8^3 c'est à dire 8x8x8 = 512 configurations différentes à tester.

Nous n'avons pas eu à toutes les tester car nous en avons trouvé une rapidement.



L'automate de taille 3x3 peut donc vivre éternellement.

<u>Conclusion</u>

On peut donc conclure de l'ensemble de notre étude qu'il est impossible qu'un automate de taille 1x1 ou de taille 1x3 vive éternellement, alors que pour toute autre taille d'automate cellulaire, on peut trouver une configuration de départ qui lui permette de vivre éternellement.