Suite de Pile ou Face

Année 2013-2014

Article réalisé par : *Émile SEGURET*, élève de terminale S-SI.
Établissements : Lycée Grandmont à Tours.
Enseignant(e)s : *Xavier FLEURY, Pascale FRADELIZI, Hakima BOUHAR* (professeurs de mathématiques au lycée Grandmont).
Chercheur : *Olivier DURIEU* (enseignant chercheur à l'université François Rabelais à Tours).

Problème de probabilité :

On lance n fois une pièce équilibrée et l'on note la suite de pile ou face obtenue. Soit n un entier naturel, quelle est la probabilité de l'événement : « le nombre de piles devient plus important que le nombre de faces pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer » ?

Conjectures et résultats:

Dans la première phase de notre étude nous avons privilégié l'approche du problème par des arbres de probabilités ce qui nous a permis de déterminer la probabilité de l'événement pour les premières valeurs de n.

Puis nous avons conjecturé que la suite du nombre de chemins valides est celle des nombres de Catalan. Après démonstration, nous avons pu répondre au problème et étudier le comportement de cette probabilité pour un très grand nombre de lancers.

Sommaire:

Chapitre I

A - Définition de l'expérience aléatoire.

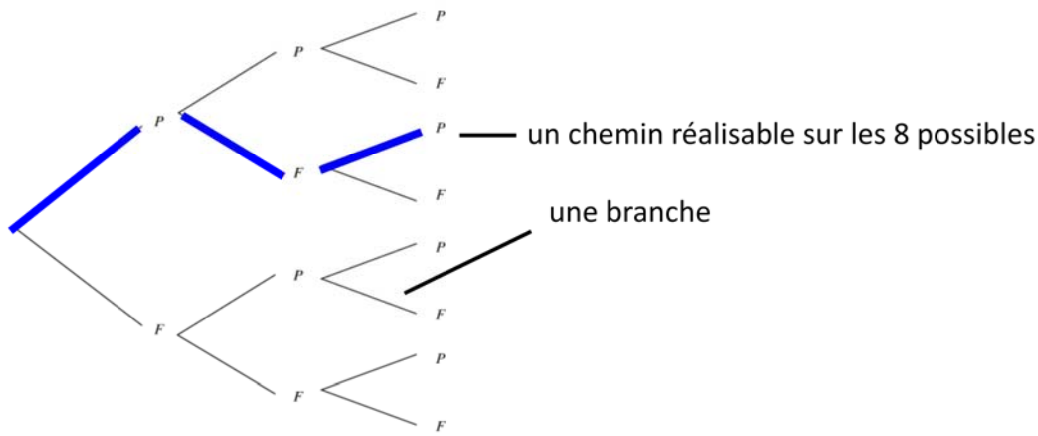
On définit au préalable les éléments suivants :

- {P,F}: l'univers de l'expérience aléatoire de base, qui est une épreuve de Bernoulli, constitué des résultats P (le joueur tire pile) et F (le joueur tire face);
- n est un entier naturel non nul désignant le nombre de lancers successifs ;
- Ω = $\{P,F\}^n$: l'univers qui contient l'ensemble des suites à n résultats de pile ou face possibles;
- E l'événement : « le nombre de piles de la suite devient plus important que le nombre de faces pour la première fois au $n^{ème}$ lancer », $E \subset \Omega$;
- p_n est la probabilité que E soit réalisé, on a par définition : $0 \leqslant p_n \leqslant 1$.

Le but de l'étude est de déterminer p_n en fonction de n.

B - Compréhension du problème.

Dans un premier temps l'outil principal de notre étude est l'arbre de probabilité. Exemple d'arbre représentant l'expérience (ici n = 3) :



Un chemin est une succession aléatoire de piles et de faces, représentés dans l'arbre par des branches, de fait toute suite de pile ou face peut être assimilée à un chemin.
Comme tous les chemins sont équiprobables, alors p_n est le rapport entre le nombre de chemins qui vérifient E et le nombre total de chemins qui constituent l'arbre. Étant donné qu'il n'y a que deux issues possibles (pile et face) lors d'un lancer, alors le nombre de chemins total d'un arbre représentant n lancers est 2^n (cardinal de Ω).
Soient (c_n) et (p_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ qui associent respectivement à chaque $n \neq 0$ le nombre de chemin qui réalisent l'événement E lors de n lancers et la probabilité de cet événement.

> Proposition 1:
>
> $$\forall n \in N^* : \ p_n = \frac{c_n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times c_n$$

Le calcul de p_n se réduit donc à celui de c_n. Essayons de déterminer l'expression de c_n. Pour cela étudions d'abord les différents arbres pour les premières valeurs de n.

C- Quelques exemples.

Notons p le nombre de piles (à ne pas confondre avec la probabilité) et f le nombre de faces dans un chemin (p et f sont deux entiers naturels). Donc : n = p + f . On recherche donc les chemins où p > f pour la première fois au n$^{\text{ème}}$ lancer.

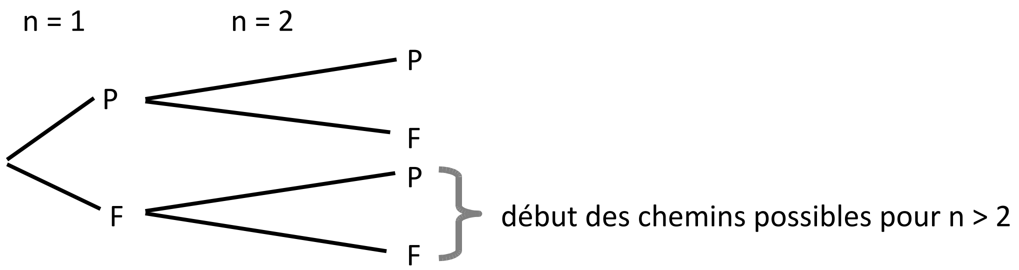
– Situation pour n = 1 :

On ne lance qu'une seule fois la pièce, donc pour que la condition de l'énoncé soit réalisée il suffit que pile apparaisse. Donc : $p_1=\frac{1}{2}$.

On peut retrouver ce résultat avec la proposition 1, car $c_1=1$, donc : $p_1=(\frac{1}{2})^1\times 1=\frac{1}{2}$.

On en déduit que pour n > 1, les chemins qui réalisent E ne doivent pas commencer par pile, car si c'est le cas le nombre de piles dépasse dès le premier lancer le nombre de faces (p = 1, f = 0). Il faut donc que la succession de piles et de faces débute par face.

– Situation pour n = 2 :

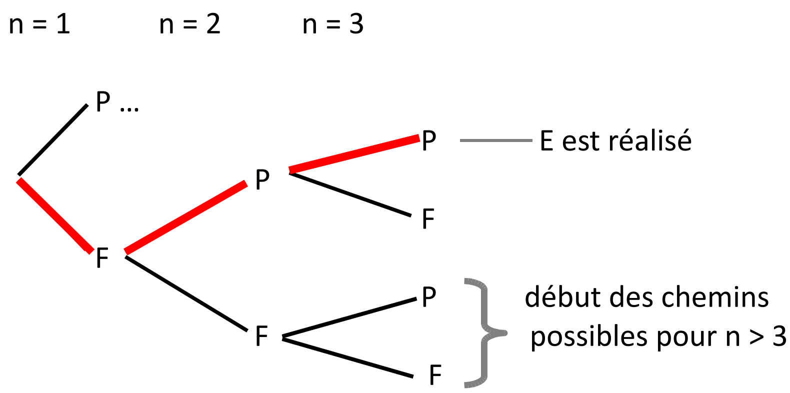


On remarque que pour n = 2 aucun chemin ne réalise E, car les deux premiers chemins en partant du haut commencent par pile et dans les deux suivants on a : p = f ou f > p.

Donc $c_2=0$ d'où : $p_2=(\frac{1}{2})^2\times 0=0$.

Pour n > 2, les chemins valides commencent par les deux derniers (cf arbre).

– Situation pour n = 3 :



$c_3=1$, donc : $p_3=(\frac{1}{2})^3\times 1=0{,}125$

Pour n > 3, les chemins qui réalisent E débutent par FPF, FFP ou FFF.

D- Simplification du problème.

On sait que tous les chemins valides au n^{ème} lancer doivent obligatoirement commencer par face. De plus on remarque qu'ils se terminent par deux piles successifs : un pour « égaliser » le nombre de faces au (n – 1)^{ème} lancer (il n'est pas nécessaire que cela se produise pour la première fois) et un pour le dépasser pour la première fois au dernier lancer.
Donc pour $n \geqslant 3$, les chemins qui réalisent E sont de la forme :
F ——— (…) ——— P ——— P , avec dans la parenthèse une suite de pile et de face que l'on doit déterminer (en accord avec la condition).

Lorsqu'un chemin réalise la condition de E, p vient de dépasser f pour la première fois, donc :
p = f + 1, d'où : n = p + f = f + f + 1 = 2f +1. Comme f est un entier naturel, alors n est nécessairement impair pour qu'il existe des chemins valides, donc pour que c_n soit différent de 0, c'est-à-dire pour que p_n soit également non nul.

Il en découle que pour un nombre de lancer pair aucun chemin ne vérifient E, d'où la proposition :

Proposition 2:
Pour tout entier naturel n pair non nul: $p_n = 0$

Ainsi l'étude du problème se simplifie : la recherche de la probabilité s'effectue maintenant pour un nombre impair de lancers supérieurs à 3.

Soient a le nombre de piles dans la parenthèse et b celui de faces, donc : n = 1 + (a + b) + 2, avec a + 2 = p et b + 1 = f, or : p = f + 1, d'où : $a+2=b+2$ c'est-à-dire a = b , il y a donc autant de piles que de faces dans la parenthèse.
On rappelle que pour que E soit réalisé au n^{ème} lancer le chemin dans la parenthèse doit satisfaire la condition de E, c'est-à-dire que p ne doit jamais y dépasser f. De l'égalité précédente, on en déduit que :

$n=1+(a+a)+2=2a+3$, donc : $a=\frac{n-3}{2}$, avec n > 2

Exemple pour n = 5 :

$a=\frac{5-3}{2}=1$, donc il y a un P et un F dans la parenthèse. De fait il y a deux chemins valides : celui où F et P apparaissent dans cet ordre et son inverse :

F — F — P — P — P
F — P — F — P — P

$c_5=2$, donc : $p_5=\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 2=0{,}0625$

E- Étude de la « parenthèse » pour n = 7 et n = 9.

Quelque soit n impair, tous les chemins ont un début et une fin identique, nous devons donc nous intéresser à la suite de piles et de faces entre parenthèse pour déterminer c_n.

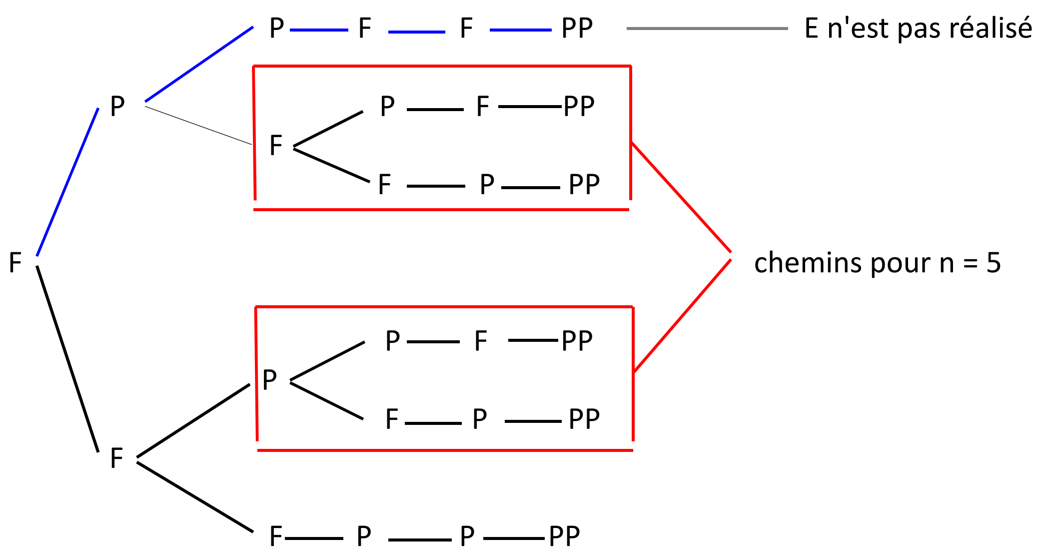
Pour que cette suite réponde aux conditions de l'énoncé on a vu que le nombre de piles doit être égal à celui de faces, donc on cherche le nombre de chemins χ_n qui contiennent $a=\frac{n-3}{2}$ fois le succès pile parmi $2a=n-3$ lancers. D'où, pour tout n entier naturel impair supérieur ou égal à 3 la suite (χ_n) est définie par :

$$\chi_n=\binom{n-3}{\frac{n-3}{2}}=\frac{(n-3)!}{(\frac{n-3}{2})!\times(n-3-\frac{n-3}{2})!}=\frac{(n-3)!}{(\frac{n-3}{2}!)^2}$$

Car quelque soient les entiers naturels n et k , avec k ≤ n : $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\times(n-k)!}$

χ_n n'est qu'une réduction du nombre de chemin total. Il est supérieur à c_n, car certain chemins de χ_n ne répondent pas à la consigne. En effet, on a vu dans la situation pour n = 3 (paragraphe C) que, en ne représentant que les chemins qui débutent par face, il ne faut pas compter une branche de l'arbre pour déterminer les chemins possibles pour n > 3 (celle qui réalise l'événement E pour n = 3). Il faut donc déterminer ce nombre de chemin à ne pas compter, suivant les valeurs de n, pour le soustraire à χ_n et ainsi déterminer c_n.

Étudions la situation pour n = 7 : $a=\frac{7-3}{2}=2$ = 2, donc : $\chi_7=\binom{4}{2}=6$



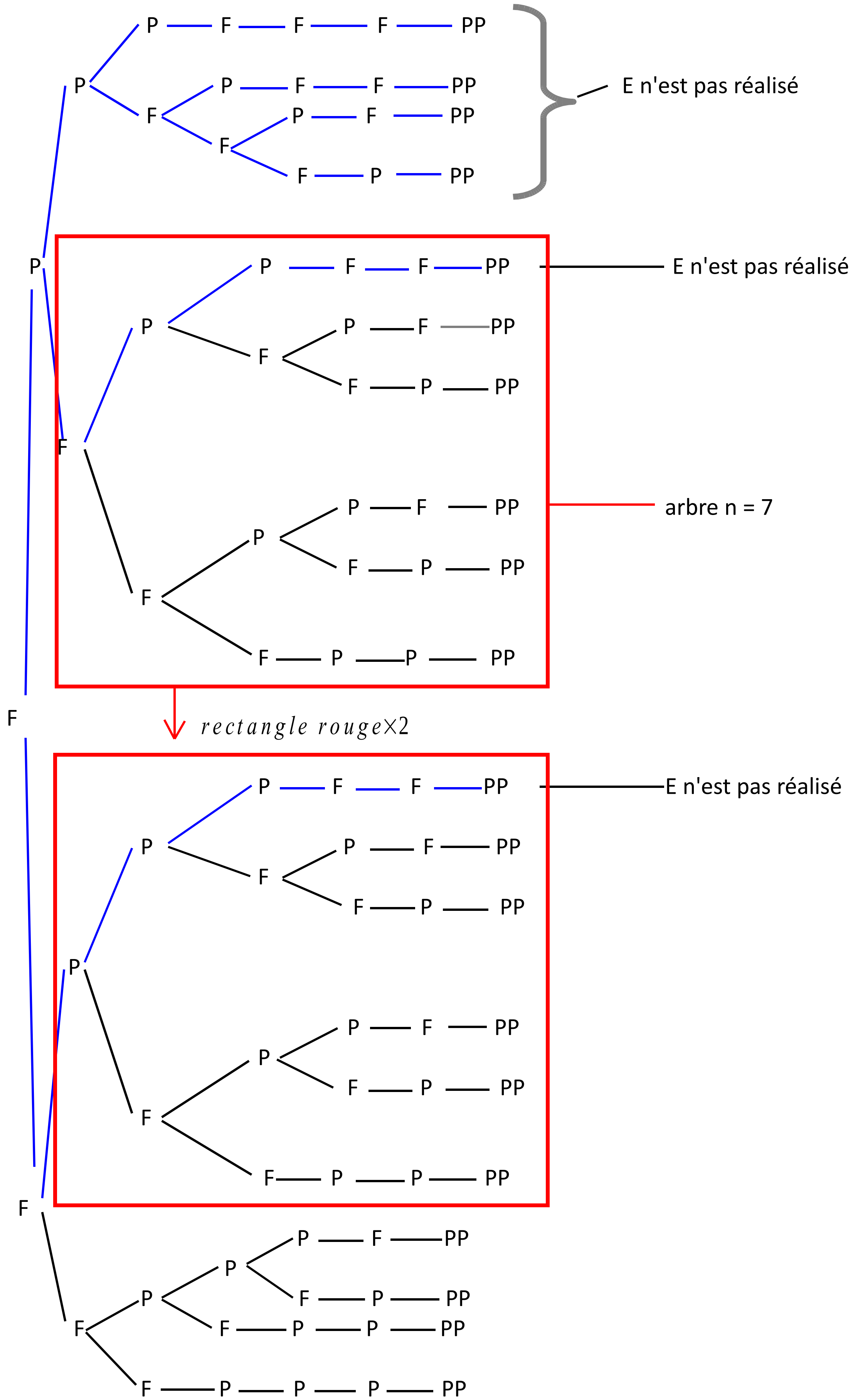
On remarque qu'un chemin ne convient pas, nous devons donc soustraire un chemin à χ_7, donc :

$c_7=\chi_7-1=6-1=5$, ainsi : $p_7=(\frac{1}{2})^7\times5=0{,}0390625$.

De plus cet arbre contient les deux chemins déterminés pour n = 5, nous verrons pourquoi dans la partie F.

De même pour n = 9 : $a=\frac{9-3}{2}=3$, donc : $\chi_9=\binom{6}{3}=20$.

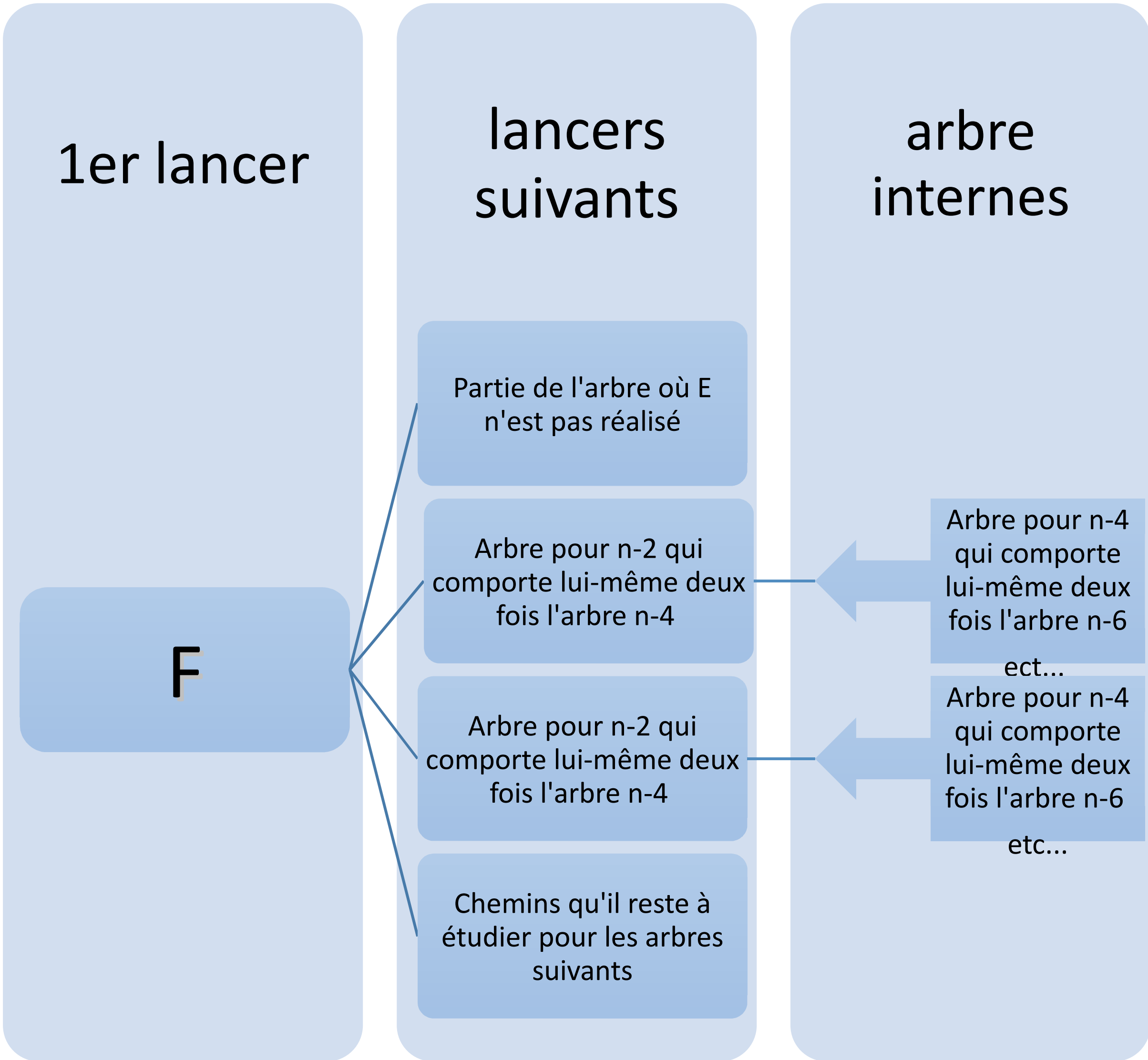
Représentons un tel « arbre » :



6 chemins ne conviennent pas donc $c_9=\chi_9-6=20-6=14$, alors : $p_9=(\frac{1}{2})^9\times 14=0{,}02734375$.

F – Généralisation du problème : étude de la structure de l'arbre.

On remarque une certaine symétrie dans ce dernier arbre comme dans ceux pour n = 7 et n = 5. En effet l'arbre pour n = 9 contient deux fois celui pour n = 7 qui inclue lui-même deux fois l'arbre n = 5.
On remarque (quand on génère de tels arbre) que cet exemple s'applique à tous les arbres qui se succèdent : un arbre X à n épreuves contient deux fois tous les chemins qui réalisent E de l'arbre Y a (n – 2) épreuves.
On peut donc généraliser la structure d'un arbre pour un nombre de lancers important. On a toujours dans la partie supérieure les chemins non valides, puis suivent deux blocs comportant la structure des arbres précédents qui contiennent également des chemins à ne pas compter dans le calcul de c_n . Et enfin en bas les autres chemins (qu'il nous reste à étudier pour les lancers suivants).



Avec ce type d'arbre on limite la recherche à la partie inférieure de la seconde colonne, car on peut établir une relation de récurrence entre les différents blocs centraux.
Cette approche nous a permis d'établir une formule pour les premières valeurs de c_n ($3\leqslant n\leqslant 9$) non présentée ici, car la structure de l'arbre ne nous a pas permis de trouver une relation de récurrence liant le nombre de chemins valides pour les valeurs de n suivantes. En effet, pour les arbres n = 11, 13 et 15

les parties inférieures des arbres (dernier rectangle de la deuxième colonne de l’arbre précédent) ne semblent pas avoir une configuration régulière, il est donc difficile de les prévoir.

Il existe sûrement une relation pour dénombrer les chemins non valides à exclure pour déterminer c_n, mais on peut supposer qu'elle ne nous permettrait de le faire que pour quelques valeurs de n, étant donné la complexité des arbres.
Tout ceci nous montre la difficulté de la recherche avec comme seul outil l'arbre de probabilité, mais également la limite de notre méthode qui est beaucoup trop longue.
A ce stade une approche informatique nous a parue nécessaire pour vérifier certains résultats et prolonger le calcul de c_n pour des valeurs de n impair supérieures à 9.

Chapitre II

A – Approche informatique et conjecture.

La complexité de l'étude nous a poussés à réaliser un algorithme permettant de connaître le nombre de chemins de l'arbre qui vérifient E de n = 1 à n = 29 et donc en déduire p_n. L'algorithme étudie tous les chemins possibles de l'arbre (c'est-à-dire 2^n) et vérifie s'ils sont corrects. Étant écrit dans le langage adapté au logiciel (pas très compréhensible) nous n’en ferons pas part ici.
Nous avons obtenu les résultats suivants :

n	c_n	p_n
1	1	0,5
3	1	0,125
5	2	0,0625
7	5	0,0390625
9	14	0,02734375
11	42	0,0205078125
13	132	0,0161132813
15	429	0,013092041
17	1430	0,0109100342
19	4862	0,0092735291
21	16796	0,0080089569
23	58786	0,0070078373
25	208012	0,0061992407
27	742900	0,0055350363
29	2674440	0,0049815327

L'algorithme nous a permis de vérifier nos résultats jusqu'à p_9 et de déterminer la probabilité de l’événement E jusqu'à n = 29. A partir de ces résultats nous avons conjecturé une assertion fondamentale pour la suite.
Conjecture : la suite (c_n) est celle des nombres de Catalan.

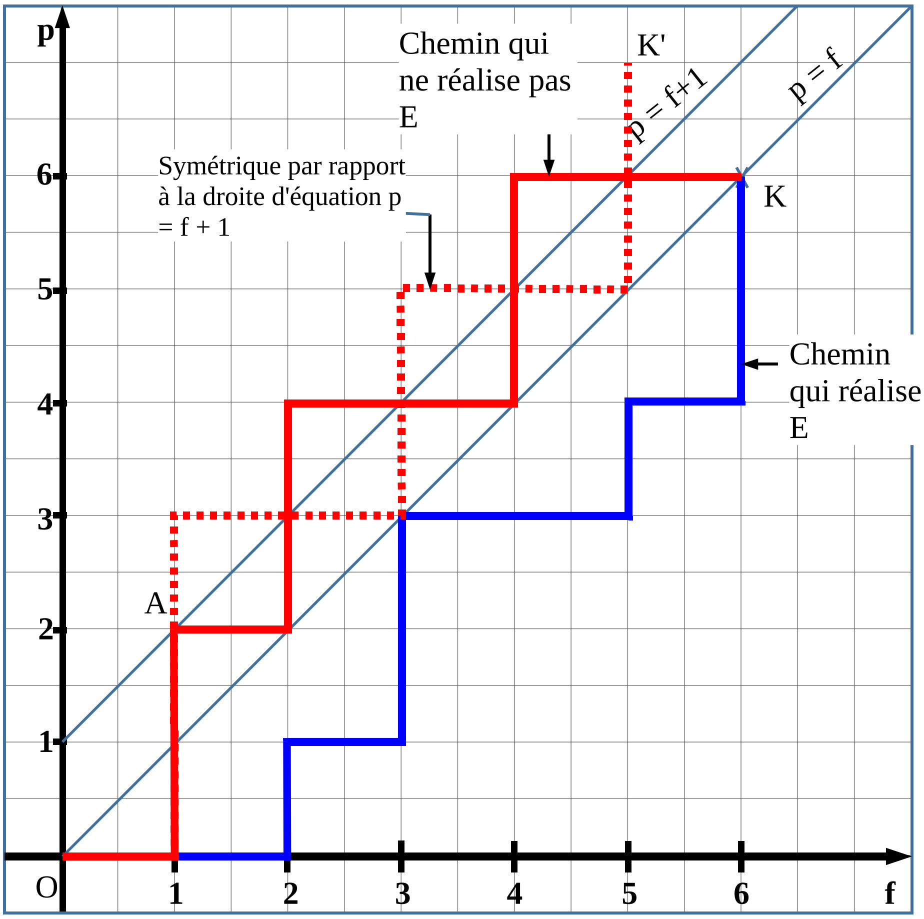
B – Représentation graphique des chemins.

On a ensuite modélisé les chemins qui nous intéressaient, non plus sur un arbre, mais sur un repère orthonormé, avec en abscisse le nombre de faces et en ordonnée le nombre de piles.
Partant de l'origine, on tire la pièce équilibrée : un déplacement horizontal d'une unité vers la droite correspond à la sortie de face et un déplacement vertical d'une unité vers le haut équivaut à la sortie de pile. On s'intéresse exclusivement aux chemins comportant un même nombre de P que de F et on note k ce nombre (k entier naturel non nul). Ainsi ces chemins partent tous de O(0;0) et arrivent au point K(k;k) (cf graphique avec k = 6). Pour aller de O à K on fait k + k déplacements dont k horizontaux et k verticaux, donc le nombre de chemins possibles est

$$\binom{k+k}{k}=\binom{2k}{k}$$

Cependant un chemin ne vérifie la condition de E que si le nombre de faces reste supérieur ou égal au nombre de piles jusqu'au (n – 1)ème , avec $n-1=2k$ car n est impair. Cela équivaut à dire que le chemin associé reste en-dessous (de manière non stricte) de la droite d'équation p = f.
On note C_k ce nombre de chemins, C_k est également le nombre de chemins qui vérifient E, car il suffit d'ajouter un pile à la fin de chaque chemin pour être en accord avec l'énoncé (de manière à ce que le nombre de pile dépasse pour la première fois le nombre de face au nème lancer de la pièce).
On a donc : $C_k=c_n$, avec n = 2k + 1. C_k est égal au nombre de chemins total allant de O à K moins le nombre de chemins de O à K qui traversent la diagonale, c'est-à-dire qui touchent la droite d'équation p = f + 1. Le premier est connu il suffit donc de calculer le second. On a représenté un tel chemin en rouge sur le graphique.

Graphique avec k = 6 :



Appliquons le principe de symétrie pour déterminer le nombre de chemin à soustraire à $\binom{2k}{k}$ pour obtenir C_k.

On considère le premier point A où le chemin rouge touche la droite d'équation p = f + 1 . Ensuite on prend la symétrie orthogonale du chemin rouge qui va de A à K par rapport à la droite d'équation p = f + 1. On obtient le chemin en pointillé rouge qui va de O à K'(k – 1 ; k + 1), car K' est le symétrique de K par rapport à la droite d'équation p = f + 1. Le reste de la trajectoire (chemin O - A) reste inchangé.

Grâce à cette symétrie, on a associé à notre chemin rouge de O à K un chemin de O à K'.

Réciproquement, si on a un chemin de O à K', il va nécessairement toucher la droite d'équation p = f + 1. En effet le point de départ et le point d'arrivé sont de part et d'autre de cette droite. Soit A le premier point où le chemin touche cette droite. On réalise donc la transformation précédente, et on obtient un chemin, symétrique par rapport au précédent, qui va de A à K et dont le début (de O à A) est identique.

On a donc établit une bijection entre l'ensemble des chemins de O à K qui touchent la droite d'équation p = f + 1 et l'ensemble des chemins de O à K'(k – 1 ; k + 1). Ces deux ensembles ont donc le même cardinal, soit

$$\binom{k+1+k-1}{k-1}=\binom{2k}{k-1}$$

On en déduit C_k :

$$C_k=\binom{2k}{k}-\binom{2k}{k-1}=\frac{(2k)!}{k!(2k-k)!}-\frac{(2k)!}{(k-1)!(2k-k+1)!}=\frac{(2k)!}{k!k!}-\frac{(2k)!}{(k-1)!(k+1)!}$$

Ou encore :

$$C_k=\frac{(2k)!(k+1)}{k!(k+1)!}-\frac{(2k)!k}{k!(k+1)!}=\frac{(2k)!(k+1-k)}{k!(k+1)!}=\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}$$

Il en découle :

$$C_k=\frac{\frac{1}{k+1}\times(2k)!}{k!\times k!}=\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}(*)$$

C_k est appelé le k$^{\text{ème}}$ nombre de Catalan.

C – Calcul de la probabilité suivant le nombre de lancers.

C_k est le nombre de chemins qui réalisent l'événement E lors de 2k + 1 lancers.

Or $2k+1=n\Leftrightarrow k=\frac{n-1}{2}$. D'où : $c_n=C_k=C_{\frac{n-1}{2}}$.

En substituant k par $\frac{n-1}{2}$ dans la relation (*), on obtient :

$$c_n=\frac{1}{\frac{n-1}{2}+1}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}=\frac{2}{n+1}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$$

Proposition 3:

Le nombre de chemins qui vérifient E dans un arbre à 2^n chemins est :

$$c_n = \frac{2}{n+1}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$$

La probabilité de l'événement : « le nombre de pile devient plus important que le nombre de face pour la première fois au n^ème lancer » est donc donnée pour tout entier naturel impair par :

$$p_n = \frac{c_n}{2^n} = \frac{2}{2^n(n+1)}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$$

Et c'est ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 4:

La probabilité de l'événement : « le nombre de pile devient plus important que le nombre de face pour la première fois au n^ème lancer d'une pièce équilibrée » est donnée pour tout entier naturel n impair par :

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}(n+1)}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$$

Chapitre III

A – Étude asymptotique de p_n en $+\infty$

Étudions le comportement de la suite extraite de (p_n) sur l'ensemble des entiers naturels impairs (on continuera à la noter (p_n)) lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, pour cela déterminons le sens de variation de la suite sur l'ensemble des entiers naturels impairs. La suite (p_n) dépend de la suite (c_n), car $p_n = \frac{1}{2^n}c_n$, donc calculons le rapport qui lie deux termes consécutifs de (c_n) de rangs impairs.

Soit n un entier impair, on a :

$$c_n = \frac{2}{n+1}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{2(n-1)!}{(n+1)\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(n-1-\frac{n-1}{2}\right)!} = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

D'où :

$$c_n = \frac{(n-1)!}{(\frac{n+1}{2})!(\frac{n-1}{2})!}$$

c_n est le rapport entre un factoriel est le produit de deux autres, or un factoriel est strictement positif, donc par produit et quotient c_n est nécessairement différent de 0. On peut donc écrire :

$$\frac{c_{n+2}}{c_n}=\frac{\dfrac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{2})!(\frac{n+3}{2})!}}{\dfrac{(n-1)!}{(\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})!}}=\frac{(n+1)!(\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})!}{(n-1)!(\frac{n+1}{2})!(\frac{n+3}{2})!}=\frac{(n+1)!(\frac{n-1}{2})!}{(n-1)!(\frac{n+3}{2})!}$$

On simplifie :

$$\frac{c_{n+2}}{c_n}=\frac{(n-1)!\,n(n+1)(\frac{n-1}{2})!}{(n-1)!(\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})(\frac{n+3}{2})}=\frac{n(n+1)}{(\frac{n+1}{2})(\frac{n+3}{2})}=\frac{4n(n+1)}{(n+1)(n+3)}=\frac{4n}{n+3}$$

D'où :

$$c_{n+2}=\frac{4n}{n+3}c_n$$

De la même manière, comme $p_n=\frac{c_n}{2^n}$ et que $c_n\neq 0$ et $2^n\neq 0$, alors $p_n\neq 0$.

Sachant cela il s'en suit que :

$$\frac{p_{n+2}}{p_n}=\frac{\dfrac{c_{n+2}}{2^{n+2}}}{\dfrac{c_n}{2^n}}=\frac{2^n c_{n+2}}{2^{n+2}c_n}=\frac{\dfrac{4n}{n+3}c_n}{4c_n}=\frac{n}{n+3}$$

Cependant : $n<n+3\Leftrightarrow \frac{n}{n+3}<1$, car n est un entier naturel donc $n+3>0$.

D'où : $\frac{p_{n+2}}{p_n}<1\Leftrightarrow p_{n+2}<p_n$, car $p_n>0$, ainsi la suite est strictement décroissante sur l'ensemble des entiers naturels impairs. De plus : $0<p_n<1$, donc (p_n) est minorée par 0.

La suite des termes de rangs impairs de (p_n) est strictement décroissante et minorée, on en déduit que (p_n) converge.

B – Calcul de la limite de p_n

Rappelons au préalable les éléments suivants :

> Définition :
>
> Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec $v_n\neq 0$ à partir d'un certain rang, on a :
>
> $$u_n\sim v_n\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$$

Formule de Stirling:
Si n est un entier naturel, alors :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Pour tout entier naturel n impair :

$$p_n = \frac{c_n}{2^n} = \frac{(n-1)!}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)!^2}$$

En appliquant les propriétés sur les limites sur cette expression on aboutit à une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».
On utilise alors une approximation d'un factoriel par une expression n'en comportant pas, en appliquant la formule de Stirling. On a d'abord :

$$(n-1)! \sim \sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}$$

et

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)! \sim \sqrt{\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Donc :

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)!^2 \sim \pi(n-1)\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{n-1}$$

Par substitution dans la relation de p_n, on obtient :

$$p_n \sim \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi(n-1)\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{n-1}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{2^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}$$

En simplifiant :

$$p_n \sim \frac{\sqrt{2}}{2\times\left(\frac{n+1}{2}\right)\times\sqrt{\pi(n-1)}} = \sqrt{\frac{2}{(n+1)^2\times\pi\times(n-1)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi(n^3+n^2-n-1)}}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3+n^2-n-1) = \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$$

Donc en le multipliant par une constante :

$\lim_{n\to+\infty} \pi(n^3+n^2-n-1) = +\infty$, ainsi par passage à l'inverse :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi(n^3+n^2-n-1)} = 0^+$$

D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi(n^3+n^2-n-1)}} = \sqrt{2 \times 0} = 0$$

(p_n) s'approche d'une suite au voisinage de l'infini qui tend vers 0 par des valeurs positives en $+\infty$, donc (p_n) tend également vers 0.

Proposition 5:

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$$

Finalement plus on lance la pièce, plus la probabilité de l'événement « le nombre de pile dépasse le nombre de face pour la première fois au dernier lancer » est faible. En d'autre termes, il devient presque impossible que, lors d'un nombre de lancer impair très important, le nombre de pile dépasse pour la première fois le nombre de face au dernier lancer.

Conclusion :

La recherche d'une solution au problème s'est donc réalisée en deux temps : d'abord l'approche par des arbres de probabilités puis une démarche plus astucieuse qui permet d'aboutir à la solution.
Les arbres nous ont surtout permis d'assimiler le problème pour les premières valeurs de n et de comprendre la structure récursive du problème.
La représentation graphique des chemins qui utilise des outils géométriques permet d'obtenir le nombre de chemin valide en fonction de n, cette suite est directement liée au nombre de Catalan ce qui nous permet de déterminer la probabilité de l'événement : « le nombre de piles devient plus important que le nombre de face pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer », d'où la réponse au problème posé :

Théorème:

Lors du lancer d'une pièce équilibrée, la probabilité de l'événement : « le nombre de piles devient plus important que le nombre de faces pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer » est donnée par :

- pour tout entier naturel n paire :

$$p_n = 0$$

- pour tout entier naturel n impair :

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}(n+1)} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$$

Pour un nombre de lancers impairs la probabilité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, d'où le résultat :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$$

Notes d'édition

Aucune