3 sujets pour MATh.en.JEANS

Emmanuel Militon

1 L'addition des mauvais élèves

Pour ceux et celles qui trouvent que, décidément, additioner deux fractions est trop compliqué.

Comme l'addition standard de deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ est trop compliquée, on voudrait la remplacer par la définition suivante.

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}.$$

Est-ce que l'opération $\oplus$ est bien définie, c'est-à-dire indépendante de la représentation d'un nombre sous forme de fraction $\frac{p}{q}$? Si ce n'est pas le cas, que faut-il imposer pour que $\oplus$ soit bien définie ?

Est-ce que l'ordre des opérations a une importance, autrement dit, étant donné trois fractions x, y et z, a-t-on $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$? Est-ce que cette opération vérifie des propriétés de distributivité par rapport à la multiplication, à un élément qui joue le rôle de 0 ? Peut-on définir des opposés ?

Si on part des nombres $0 = \frac{0}{1}$ et $1 = \frac{1}{1}$, quels sont tous les nombres que l'on peut obtenir en additionnant (pour $\oplus$) un nombre fini de fois 0 et 1. Qu'en est-il si l'on remplace 0 et 1 par d'autres nombres ?

Peut-on résoudre facilement des équations de la forme $ax \oplus b = c$, avec a, b et c fractions données ? Vous êtes invités à trouver vous-mêmes des propriétés de cette opération.

3 Évolution d'une population, le modèle logistique

Enfin un sujet qui sert à quelque chose !

Dans un environnement à ressources limitées, l'évolution d'une population animale (ou de cellules, de bactéries, etc...) peut être modélisée de la manière suivante. La population lors de l'année n sera représentée par un nombre réel $x_n \in [0,1]$, qui est le rapport entre la population lors de l'année n et la population maximale possible dans cet environnement.

Le modèle logistique prévoit alors que la population lors de l'année $n+1$ sera alors

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

L'idée du modèle est que, plus la population lors de l'année n est grande, plus elle sera apte à se reproduire, d'où le facteur x_n. Néanmoins, si la population est trop importante, les ressources viendront à manquer pour entretenir la population, ce qui explique le facteur $1 - x$.

Dans quels cas la population va rester exactement la même chaque année ? Peut-on trouver d'autres cas où la population sera la même tous les deux ans ? tous les 3 ans ? Même question en remplaçant 2 et 3 par d'autres nombres. Y a-t-il des cas où, à l'inverse, la population n'est jamais la même d'année en année ?

Dans quels cas la population va-t-elle s'éteindre (c'est-à-dire que la suite (x_n) va tendre vers 0) ?

Quelle est la population moyenne maximale que l'on peut obtenir sur un grand nombre d'années ?