

PROBLÈME 1 (BINÔMES DURABLES)

Une classe de lycée est divisée en deux groupes A et B d'effectifs égaux pour les Travaux Pratiques de sciences.

Pour un projet impliquant l'ensemble de la classe, les professeurs souhaitent constituer des binômes associant à chaque fois un élève du groupe A à un élève du groupe B . Elles souhaitent bien entendu éviter au maximum les réclamations et les reconfigurations de binômes suite à cette constitution : elles demandent donc à chaque élève du groupe A de classer tous les élèves du groupe B par ordre de préférence pour un travail en binôme, et de même chaque élève de groupe B classe tous les élèves du groupe A par ordre de préférence.

À l'issue de la constitution, il se peut qu'il y ait des binômes instables : considérons par exemple les binômes $(A1 ; B1)$ et $(A2 ; B2)$. Si dans le classement de l'élève $A1$, $B2$ est au-dessus de $B1$ et dans le classement de l'élève $B2$, $A1$ est au-dessus de $A2$, alors $A1$ et $B2$ vont nourrir des regrets, concevoir de l'amertume, voire réclamer à leurs professeurs de pouvoir travailler ensemble et faire éclater leurs binômes... Bref, bonjour l'ambiance!

1. Est-il toujours possible de constituer les binômes de telle sorte qu'il y ait pas de binôme instable?
Si oui, expliciter un procédé permettant de le faire et préciser les cas défavorables s'il y en a.
2. Dans le cas où il est possible de créer des binômes tous stables, y a-t-il plusieurs possibilités?
Si oui, y en a-t-il une qui réponde au mieux aux souhaits de chaque élève?
3. La classe possède deux délégués qui se répartissent équitablement le reste des élèves pour les représenter au conseil de classe.
Si chaque élève classe les deux délégués et chaque délégué tous les autres élèves par ordre de préférence, peut-on constituer de la même manière deux groupes stables autour de chaque délégué?
4. On pourra ensuite s'intéresser à d'autres possibilités d'appariement...